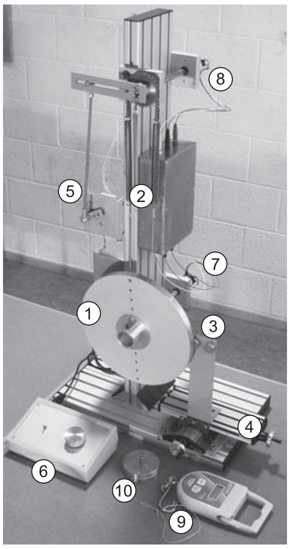
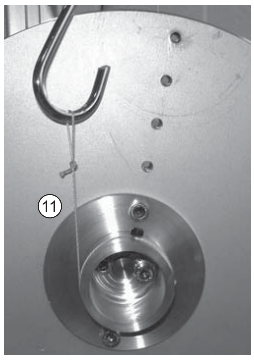
9 Resonanz

Dieser Versuch stellt einen Grundlagenversuch dar, bei dem Sie anhand eines Drehpendels das grundlegende Phänomen der harmonischen Schwingung und Effekte wie resonante Anregung studieren können. Durch Erweiterung auf einen anharmonischen Oszillator können Sie zudem das Verhalten eines chaotischen Systems kennen lernen.



(1) Drehpendel-Scheibe mit Flansch zur Drehmomentmessung
(2) Rückstell-Federn
(3) Dauermagnete für Wirbelstromdämpfung
(4) Dämpfungseinstellung
(5) Schrittmotor mit Exzenter
(6) Schrittmotor-Bedienpult
(7) Winkelsensor für Drehpendel
(8) Winkelsensor für Pendel-Antrieb
(9) Kraftmesser
(10) Messing-Zusatzgewicht



(11) Messung des rückstellenden Drehmoments

9.1 Einleitung

Schwingungsphänomene treten in mannigfaltiger Weise in der Natur und der Technik auf. Während dies in manchen Fällen offensichtlich ist, wie bei der Schwingung einer Gitarrensaite oder der unerwünschten Schwingung eines gefederten Fahrwerks, stecken insbesondere hinter vielen Naturphänomenen verborgen Schwingungen, oft auf mikroskopischer Ebene. So wird z.B. Lichtstreuung, die das Blau des Himmels verursacht, durch eine von der Lichtwelle erzwungene Schwingung der Elektronen der Luftmoleküle verursacht. In vielen Fällen handelt es sich dabei nur näherungsweise um harmonische Oszillatoren bzw. die Auslenkungen sind so klein, dass die Schwingung trotzdem näherungsweise harmonisch ist.
Das bei diesem Versuch verwendete Drehpendel stellt ein makroskopisches mechanisches Modellsystem dar, bei dem Schwingungsphänomene untersucht werden können. Die Ergebnisse sind aber prinzipiell auf alle anderen schwingungsfähigen Systeme übertragbar, auch wenn sich diese z.B. auf atomarer Größenskala bewegen.

9.2 Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die notwendigen Grundlagen, insbesondere auch die mathematischen rekapituliert werden. Dabei soll alles gleich am konkreten Beispiel des Versuchs-

Drehpendels dargestellt und die entsprechenden Größen (also für eine Drehschwingung) verwendet werden.

9.2.1 Gedämpfte Eigenschwingung des harmonischen Oszillators

Ein schwingungsfähiges mechanisches System besteht im einfachsten Fall aus einem Körper, der eine Massenträgheit oder (wie in diesem Versuch) ein Trägheitsmoment besitzt, und einem rückstellenden System, das den Körper bei Auslenkung in die Gleichgewichtslage zurücktreibt. Dazu übt das rückstellende System eine Kraft oder ein Drehmoment auf den Körper aus. Ein einfacher aber wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der Betrag des rückstellenden Drehmoments M_R direkt proportional zur Winkelauslenkung φ ist[1]:

$$M_\mathrm{R} = -k \cdot \varphi \tag{9.1}$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass das Drehmoment immer entgegen der Auslenkungsrichtung wirkt. k nennt man die Winkelrichtgröße. Wird das Drehpendel aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt und anschließend sich selbst überlassen, so führt es eine Bewegung aus, welche im Vorhandensein einer Dämpfung (oder Reibung) mit der Zeit abklingen sollte. Um diese Bewegung quantitativ zu erfassen, müssen alle wirkenden Drehmomente betrachtet werden. Außer M_R wirken dabei noch zwei weitere Drehmomente:

$M_\mathrm{T} = -\Theta \cdot \ddot{\varphi}$ Trägheitsdrehmoment, das der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ entgegenwirkt
$M_\mathrm{D} = -\gamma \cdot \dot{\varphi}$ Dämpfungsdrehmoment, das der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ entgegenwirkt

Θ bezeichnet dabei das Trägheitsmoment des Drehschwingers und γ die Dämpfungskonstante. Wir gehen von einer Dämpfung aus, deren Betrag direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist, was bei der im Versuchsaufbau verwendeten Wirbelstrombremse auch tatsächlich zutrifft. Dies gilt jedoch nicht für alle Arten von Reibung.[2] Die Summe aller Drehmomente muss zu jedem Zeitpunkt verschwinden:

$$M_\mathrm{T} + M_\mathrm{D} + M_\mathrm{R} = 0 \tag{9.2}$$

Setzt man nun die einzelnen Ausdrücke für die Drehmomente ein, so erhält man als Bewegungsgleichung für die Auslenkung φ:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + k\varphi = 0 \tag{9.3}$$

Dies ist eine *homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*, zu deren Lösung die Mathematik eine geschlossene Theorie bereitstellt. Hier sollen jedoch nur knapp die Ergebnisse rekapituliert werden:
Bereits im Hinblick auf die Lösung der Differentialgleichung bietet es sich an, eine Abklingkonstante $\lambda = \gamma/(2\Theta)$ einzuführen, deren Wert verschiedene Bewegungszustände charakterisiert. Bei $\lambda^2 > k/\Theta$ (d.h. sehr starke Dämpfung) liegt der sogenannte Kriechfall vor, bei $\lambda^2 = k/\Theta$ spricht man vom aperiodischen Grenzfall, bei dem der ausgelenkte Oszillator in der kürzesten Zeit die Gleichgewichtslage erreicht. Im Rahmen dieses Versuchs wollen wir uns auf den dritten Fall $\lambda^2 < k/\Theta$ beschränken, den Schwingungsfall, der

[1] In Systemen, die sich nicht so verhalten, die also dieses lineare Kraftgesetz nicht erfüllen, kann man die rückstellende Kraft als Taylorreihe (Potenzreihe) um die Gleichgewichtslage entwickeln. Das erste, nichtverschwindende Glied ist der lineare Term. Man kann das System (zumindest für hinreichend kleine Auslenkungen) damit näherungsweise trotzdem als harmonischen Oszillator behandeln.
[2] Gleitreibung ist z.B. von der Reibungsgeschwindigkeit weitgehend unabhängig.

bei hinreichend kleiner Dämpfung auftritt. Die Lösung der Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\varphi_{\text{eigen}}(t) = \varphi_0 \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_0 t) \tag{9.4}$$

Die Lösung ist also eine exponentiell abklingende sinusförmige Schwingung, die durch die Eigenfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ und durch die Abklingzeit $\tau = 1/\lambda$ charakterisiert wird. Für die Eigen-Kreisfrequenz gilt dabei:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - \lambda^2}$$

Die Abklingzeit τ ist diejenige Zeitdauer, in der die Amplitude auf den e–ten Teil abgesunken ist. Häufig verwendet man auch die Halbwertsdauer $T_{1/2}$, nach welcher die Amplitude auf die Hälfte abgefallen ist. Zwischen diesen Größen gilt der Zusammenhang:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$$

Besonders hervorzuheben ist, dass die Eigenfrequenz nur von den Pendelparametern Θ, γ und k abhängt, aber *nicht* von der Amplitude, mit welcher das Pendel schwingt. Dies ist die wichtigste Besonderheit von *harmonischen Oszillatoren*, die immer durch eine lineare Bewegungsgleichung beschrieben werden.

9.2.2 Erzwungene Schwingung des harmonischen Oszillators - Resonanz

Nun soll durch ein äußeres, periodisches Drehmoment das Drehpendel zu Schwingungen angeregt werden. Wir gehen dabei von einer sinusförmigen Anregung mit der beliebig einstellbaren Kreisfrequenz ω aus. Unabhängig von der technischen Realisierung kann dies in der Bewegungsgleichung durch einen zusätzlichen Term beschrieben werden:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + k\varphi = M_{\text{ext}} \cdot \sin(\omega t) \tag{9.5}$$

Dies ist eine *inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*. Als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung erhält man[3] (wieder für $\lambda^2 < k/\Theta$):

$$\varphi(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t - \Phi) + C \cdot \exp(-\lambda t) \cdot \cos(\omega_0 t - \beta) \tag{9.6}$$

Der zweite Term stellt die gedämpfte Eigenschwingung dar und ist nach einer hinreichend langen Einschwingzeit vernachlässigbar. Dieser Einschwingvorgang besitzt dieselbe Zeitkonstante wie das Ausschwingen des Pendels ohne äußeren Antrieb. Beschränkt man sich auf den übrigbleibenden Teil der Schwingung so kann man schreiben:

$$\varphi_{\text{erzwungen}}(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t - \Phi) \tag{9.7}$$

Man erkennt, dass das Pendel dann mit der (Kreis)Frequenz ω des äußeren Antriebs schwingt aber um den Phasenwinkel Φ der anregenden Schwingung hinterhereilt. Interessant ist nun insbesondere der von der Anregungs-Kreisfrequenz abhängige Amplitudenfaktor $A(\omega)$. Diesen kann man erhalten, indem man den Ausdruck für $\varphi_{\text{erzwungen}}(t)$ in Gleichung 9.5 einsetzt, es ergibt sich:

$$A(\omega) = \frac{M_{\text{ext}}}{\sqrt{\Theta^2(\omega_0^2 - \omega^2 + \lambda^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \tag{9.8}$$

[3] Die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung 9.5 setzt sich zusammen aus der Lösung der *homogenen* DGL 9.3 und einer partikulären Lösung der *inhomogenen* DGL 9.5. Dieses Verfahren ist durch die Eigenschaft linearer Systeme möglich, *Superpositionen* einzelner Lösungen zu erlauben. Dies bedeutet, dass sich verschiedene gleichzeitig angeregte Schwingungen nicht gegenseitig beeinflussen.

ω_0 ist wieder die Kreisfrequenz der gedämpften Eigenschwingung. Für die Phasendifferenz Φ folgt:

$$\tan(\Phi) = \frac{\omega\gamma}{\Theta(\omega_0^2 - \omega^2 + \lambda^2)}$$

Erzwungene Schwingungen sind mit einem bekannten Phänomen verbunden, das direkt aus der Gleichung 9.8 abgelesen werden kann, nämlich dem Phänomen der Resonanz oder resonanten Anregung. Die Amplitude erreicht bei der *Resonanzkreisfrequenz*

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{k}{\Theta} - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

einen Maximalwert von:

$$A(\omega_{\text{res}}) = \frac{M_{\text{ext}}}{2\Theta \cdot \lambda \cdot \omega_0}$$

Bei verschwindender Abklingkonstante λ (also bei verschwindender Dämpfung) erreicht diese Amplitude im Prinzip beliebig große Werte, wobei dann eine Zerstörung des schwingungsfähigen Systems eintreten kann (Resonanzkatastrophe). Für kleine Dämpfungen gilt zudem:

$$\omega_{\text{res}} \approx \omega_0 \approx \sqrt{k/\Theta}$$

Trägt man nun $A(\omega)$ gegen ω auf, so erhält man die sogenannte *Resonanzkurve* (siehe Abb. 9.1). Man sieht, dass die Kurve *nicht* symmetrisch bezüglich der Resonanzfrequenz

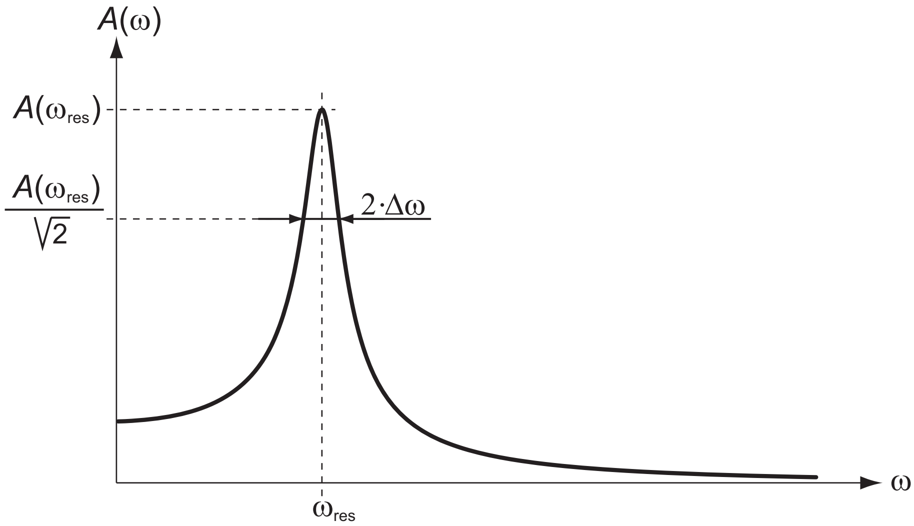


Abbildung 9.1: Die Resonanzkurve.

ist. Eine zentrale Größe, durch die eine Resonanzkurve charakterisiert wird, ist dabei die sogenannte Halbwertsbreite. Diese ist ein Maß für die Breite des Resonanzmaximums. Eine kleine Breite bedeutet, dass die Resonanz sehr scharf wird, man muss dann bei der externen Anregung die Resonanzfrequenz hinreichend genau treffen, um in den Bereich großer Schwingungsamplituden zu gelangen. Bei der hier betrachteten Resonanzkurve der Oszillator–Amplitude[4] $A(\omega)$ wird die Halbwertsbreite allerdings nicht beim halben

[4]Eine andere Darstellungsweise ist die Auftragung der im Oszillator gespeicherten Energie über der Anregungsfrequenz. Die gespeicherte Energie skaliert dabei quadratisch zur Oszillatoramplitude, da die in den Rückstellfedern gespeicherte potentielle Energie quadratisch von der Oszillatorauslenkung abhängt. Bei der Auftragung dieser Energie würde dann die "echte" Halbwertsbreite, also die Breite beim halben Maximalwert abgelesen werden.

sondern beim $1/\sqrt{2}$–fachen Maximalwert abgelesen (siehe Abb. 9.1). Die gesamte Halbwertsbreite wird dabei mit $2 \cdot \Delta\omega$ bezeichnet, sodass $\Delta\omega$ die Hälfte dieser Breite angibt. Unter der Bedingung hinreichend kleiner Dämpfungen kann man zeigen, dass das oben definierte $\Delta\omega$ gleich der Abklingkonstanten λ ist:

$$\Delta\omega = \lambda \tag{9.9}$$

Betrachtet man statt λ die Abklingdauer τ so ergibt sich folgende, fundamentale Formel:

$$\tau\Delta\omega = 1 \tag{9.10}$$

Für den bisher betrachteten Sachverhalt bedeutet dies, dass ein stärkerer gedämpfter Oszillator mit kleiner Abklingdauer (der Eigenschwingung) eine breite Resonanzkurve besitzt, ein schwächer gedämpfter Oszillator mit langer Abklingdauer hingegen eine schmale Resonanzkurve.
Die Resonanzkurve beschreibt jedoch prinzipiell nicht nur das Verhalten des Systems bei äußerer Anregung, sondern auch das emittierte Frequenzspektrum, wenn im System gespeicherte Energie aufgrund der Dämpfung an die Umgebung abgegeben wird. Hierin liegt die große Bedeutung von Gleichung 9.10 für viele Phänomene in der Physik, so führen z.B. angeregte Atomzustände mit kurzer Lebensdauer beim elektromagnetischen Übergang zu breiten Spektrallinien des emittierten Lichts, während langlebige Zustände zu scharfen Linien führen.

9.2.3 Anharmonischer Oszillator / Nichtlineares System

Wir wollen nun von der bisherigen Voraussetzung abrücken, dass wir es mit einem harmonischen Oszillator bzw. mit einem linearen System zu tun haben. Prinzipiell kann dies auf unterschiedliche Weise geschehen und wird bei realen physikalischen Systemen von verschiedenen Effekten verursacht. Am konkreten Versuchsaufbau erreichen wir eine Nichtlinearität durch Anbringen eines Zusatzgewichts (Masse m) am Rand der Oszillatorscheibe (Abstand R zur Drehachse). Da die Schwerkraft (Schwerebeschleunigung g) stets senkrecht nach unten wirkt, für das Drehmoment jedoch nur die Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm wesentlich ist, ergibt sich für dieses zusätzliche Drehmoment eine Abhängigkeit vom Sinus des Auslenkwinkels:

$$M_{\mathrm{Z}} = m \cdot g \cdot R \cdot \sin\varphi = \kappa \cdot \sin\varphi \tag{9.11}$$

Ergänzt man nun (vorzeichenrichtig) die Gleichung 9.5 um diesen Term, so erhält man:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + k\varphi - \kappa\sin\varphi = M_{\mathrm{ext}}\sin(\omega t) \tag{9.12}$$

Durch den Sinus des Auslenkwinkels ist Gl. 9.12 nun nichtlinear in φ. Es handelt sich um eine *nichtlineare inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung*. Diese Gleichungen sind nun mathematisch i.a. nicht mehr geschlossen lösbar, sie können entweder nur noch numerisch oder unter gewissen Randbedingungen mit Hilfe von Näherungen gelöst werden.
Entscheidend ist insbesondere auch, dass die Schwingungsfrequenz nun von der Schwingungsamplitude abhängen kann. Zudem können Schwingungen entstehen, die sich aus verschiedenen, miteinander verkoppelten Frequenzkomponenten zusammensetzen.

9.2.4 Chaotisches Verhalten

Intuitiv würde man von einem einfachen mechanischen System mit wenigen Freiheitsgraden, wie es z.B. das Versuchspendel offensichtlich darstellt, eigentlich ein übersichtliches Verhaltensmuster mit einem jederzeit vorhersagbaren und berechenbaren Bewegungsablauf erwarten. Solange es sich um ein lineares System handelt ist dies auch der Fall, wie man an Lösung 9.6 erkennen kann. Nach einem Einschwingvorgang führt das Pendel immer den gleichen Bewegungsvorgang aus. Dies kann sich jedoch bereits mit der Einführung einer nichtlinearen Größe ändern. Da wir uns bei diesen Betrachtungen im Rahmen der klassischen Mechanik bewegen (also keine quantenmechanischen Phänomene berücksichtigen), ist zwar jede Bewegung deterministisch und daher im Prinzip berechenbar (wenn auch evtl. nur numerisch), allerdings können (beliebig) kleine Änderungen der Startbedingung in endlicher Zeit zu völlig verschiedenen Bewegungszuständen führen. Da man die Startbedingungen aber immer nur mit endlicher Genauigkeit kennt, führt dieses Verhalten praktisch dazu, dass der Bewegungsablauf nicht mehr vorhersagbar wird. Dieses Verhalten ist typisch für ein chaotisches System.

9.3 Die Darstellung im Phasenraum

In den vorigen Kapiteln haben wir verschiedene mechanische Systeme betrachtet und die zugehörigen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Die Lösungen dieser Gleichungen liefern dann den direkten zeitlichen Verlauf des Auslenkwinkels $\varphi(t)$ bzw. durch Ableitung nach der Zeit den Verlauf der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$. Diesen Verlauf kann man als Funktion über der Zeit (z.B. mit einem Oszilloskop) darstellen.
Da es sich beim Auslenkwinkel und der Winkelgeschwindigkeit um sogenannte Zustandsgrößen handelt, bietet sich in diesem Zusammenhang noch eine andere Darstellungsform an, nämlich die Darstellung im Phasenraum (oder auch Zustandsraum). Dabei werden die verschiedenen Zustandsgrößen auf unterschiedlichen Koordinatenachsen aufgetragen, sodass jeder Zustand (der zu einem bestimmten Zeitpunkt auftritt) durch einen Punkt charakterisiert ist. Im Verlauf der Bewegung werden verschiedene Zustände durchlaufen, es entsteht eine Kurve im Phasenraum. Sind bei der Phasenraum-Darstellung alle relevanten Zustandsgrößen berücksichtigt, so ist die Weiterentwicklung eines Zustands in eindeutiger Weise festgelegt.[5] Dies führt auch dazu, dass sich Phasenbahnen nie schneiden dürfen.
Im Falle der gedämpften Eigenschwingung ist die Charakterisierung durch die beiden Größen Auslenkwinkel $\varphi(t)$ und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ bereits vollständig. Der zugehörige Phasenraum ist also zweidimensional. Die Phasenbahn kann als ebene Kurve in einem Diagramm, bei dem üblicherweise der Auslenkwinkel φ auf der x-Achse und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ auf der y-Achse aufgetragen wird, dargestellt werden. Die Zeit tritt hier als explizite Größe nicht in Erscheinung.
Im Falle der erzwungenen Schwingung ist der Bewegungszustand allerdings nicht mehr durch die beiden Größen φ und $\dot{\varphi}$ eindeutig bestimmt, zusätzlich ist noch die Stellung des Pendel-Antriebs zu spezifizieren. Da sich die Stellung des Antriebs in fester Beziehung zur Zeit entwickelt (über $\sin(\omega t)$) kann als dritte Koordinatenachse auch direkt die Zeit t gewählt werden. Insgesamt ist der Phasenraum nun dreidimensional, die Phasenbahn beschreibt eine Kurve im Raum. Da dies graphisch nicht mehr ohne weiteres darstellbar ist, beschränken wir uns aber auch hier auf eine zweidimensionale Darstellung in der φ

[5] Dies gilt nicht mehr, wenn das System quantenmechanisch beschrieben werden muss, dann können nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden.

- $\dot{\varphi}$ - Ebene. In dieser Projektion muss man in Kauf nehmen, dass sich die Phasenbahn scheinbar überschneidet (was sie in der vollständigen dreidimensionalen Darstellung aufgrund der Determiniertheit der Bewegung nicht tut).
Der Vorteil der Darstellung im Phasenraum besteht darin, dass bestimmte Bewegungsmuster sehr übersichtlich dargestellt werden, eine periodische Bewegung ergibt z.B. eine geschlossene Kurve, die immer wieder durchlaufen wird. Insbesondere chaotisches Verhalten zeigt sich eindrucksvoll im Phasenraum, nämlich dadurch, dass das System in immer neue Bereiche des Phasenraums vordringt, in denen es vorher noch nicht war. Dies bedeutet, dass keine sich wiederholende Bewegung erkennbar ist. Am Phasenraum kann man sich auch die Grundvoraussetzungen für chaotisches Verhalten klar machen. Neben einer Nichtlinearität in der Bewegungsgleichung muss der Phasenraum mindestens dreidimensional sein. Nur dann sind komplexe Bewegungsmuster ohne Überschneidung der Phasenbahn möglich. Das nichtlineare Drehpendel mit äußerem Antrieb erfüllt somit die Minimalvoraussetzung um chaotisches Verhalten beobachten zu können.

9.4 Versuchsdurchführung

9.4.1 Der Versuchsaufbau

Das Drehpendel

Das Drehpendel des Versuchsaufbaus besteht aus einer massiven Aluminiumscheibe, die im ausgelenkten Zustand über zwei vorgespannte Zugfedern ein rückstellendes Drehmoment in die Gleichgewichtslage erfährt. Das Pendel darf / kann nur soweit ausgelenkt werden, dass beide Federn stets unter Zugspannung bleiben. Die Dämpfung erfolgt durch eine Wirbelstrombremse mit Hilfe von zwei Dauermagneten. Die dämpfende Wirkung kann durch Verschieben der Magnete in radialer Richtung zur Pendelscheibe eingestellt werden. Der Abstand zwischen Magnete und Scheibenfläche sollte immer ungefähr 2 mm betragen. Der externe Antrieb des Pendels erfolgt über einen Schrittmotor mit Exzenter, der an der oberen Aufhängung der Federn angreift. Der Schrittmotor wird über das separate Bedienpult betrieben. In der Stellung *ein* dreht sich der Motor, seine Drehzahl kann über das 10-Gang-Potentiometer in einem weiten Bereich eingestellt werden. In der Stellung *aus* wird die Position des Motors über einen Haltestrom fixiert. Die Auslenkung des Pendels und die Position des Antriebs werden von jeweils einem Winkelsensor (berührungslos über Magnetfeld) erfasst. Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ergibt sich durch Differenziation der Pendelauslenkung über der Zeit (per Analogelektronik), zu deren Bestimmung ist daher kein zusätzlicher Sensor erforderlich. Alle drei Signale werden digitalisiert und über eine Rechnerschnittstelle auf den Mess-PC übertragen.
Warnhinweise: Die für die Wirbelstrombremse verwendeten Neodym-Magnete erzeugen in ihrer Nähe ein sehr starkes Magnetfeld! Halten Sie daher keine magnet-empfindlichen Gegenstände direkt an die Magnete, insbesondere keine Scheckkarten, Handys und auch Armbanduhren. Fassen Sie nicht in die Antriebsmechanik wenn der Motor läuft!

Die Datenaufnahmesoftware

Die Aufzeichnungssoftware bietet folgende Möglichkeiten Messwerte zu erfassen:

1. Der momentane Auslenkwinkel des Drehpendels wird (analog und digital) angezeigt. Über einen Schieberegler kann ein Offset eingestellt werden. Damit kann in der Pendelgleichgewichtslage die Anzeige auf Null gestellt werden.

2. Mit einem Schreiber kann der zeitliche Verlauf aller drei Messwerte (Auslenkwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Stellung des Pendelantriebs) wie auf einem Oszilloskop dargestellt werden. Die Darstellung der Signale kann einzeln ein- und ausgeschaltet werden (durch Klick auf die farbigen Felder). Der Schreiber kann zu einem beliebigen Zeitpunkt gestartet und wieder gestoppt werden. Nach dem Stoppen der Aufnahme können bestimmte Bereich vergrößert werden, außerdem können mit dem Maus-Cursor Datenpunkte genau abgelesen werden.

3. Die Frequenz (nicht die Kreisfrequenz) des externen Antriebs wird angezeigt. Es dauert einige Sekunden, bis sich die Anzeige stabilisiert, wenn die Frequenz verändert wurde. Bei kleinen Frequenzen (unter 0,5 Hz) kann die Anzeige zeitweise auch etwas instabil sein.

4. In einem Phasenraumdiagramm werden die Wertepaare Auslenkwinkel (auf der x-Achse) und Winkelgeschwindigkeit (auf der y-Achse) aufgezeichnet. Die Darstellung kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt zurückgesetzt werden.

Hinweis: Die Datenaufnahme liefert für alle drei Messwerte nur relative Zahlenangaben im Bereich von -10 bis +10. Eine Skalierung in absolute Werte für den Winkel bzw. die Winkelgeschwindigkeit ist weder für das Verständnis noch für die Durchführung der Messaufgaben notwendig.

9.5 Messaufgaben

Aufgabe 1 – Zusammenhang zwischen Auslenkung und rückstellendem Drehmoment

- Stellen Sie das Drehpendel mit dem Antriebsmotor (bei kleiner Drehzahl) möglichst genau auf Mittelstellung, d.h. die Reihe der Gewindebohrungen soll möglichst senkrecht ausgerichtet sein. (Entfernen Sie vorab das Zusatzgewicht, falls dieses noch montiert sein sollte.)

- Stellen Sie die Anzeige für den Auslenkwinkel in der Datenaufnahmesoftware auf 0 (über den Offset).

- Hängen Sie das Schnurende am Kraftmesser in der Schraube am Flansch vorne auf der Pendelscheibe ein (siehe rechtes Bild am Beginn der Anleitung). Lenken Sie nun über den Kraftmesser das Pendel in einer Drehrichtung auf mindestens fünf Einstellungen bis knapp unter die maximal mögliche Auslenkung (d.h. beide Federn noch unter Zugspannung) aus. Notieren Sie für jede Auslenkung die notwendige Kraft und die vom Messprogramm angezeigte Auslenkung. Wiederholen Sie diese Prozedur für die andere Drehrichtung. Berechnen Sie aus den Kräften *vorzeichenrichtig* die Drehmomente, die das Pendel zurückstellen. (Die rückstellenden Drehmomente sind den vom Kraftmesser aufgebrachten Drehmomenten entgegengesetzt. Der Durchmesser des Flansches beträgt 40 mm.)

- Tragen Sie in einem Diagramm die rückstellenden Drehmomente über den jeweiligen Auslenkungen auf. (Hinweis: Verwenden Sie die lange Seite des Diagramms für die Darstellung der Drehmomente und versuchen Sie den Diagrammbereich möglichst auszuschöpfen.) Welchen Zusammenhang erkennen Sie? Was folgt daraus für eine Eigenschaft des Drehpendels?

Aufgabe 2 – Einfluss der Dämpfung auf die Eigenschwingung In den folgenden Teilaufgaben soll der Einfluss der Dämpfung untersucht werden:

- Stellen Sie als erstes eine sehr schwache Dämpfung ein (der linke der beiden Bremsmagnete soll 2 bis 3 mm in die Scheibenfläche ragen). Lenken Sie das Pendel um deutlich über 90° aus, starten Sie sowohl den Schreiber wie auch das Phasendiagramm und lassen Sie das Pendel frei schwingen. Was beobachten Sie jeweils (qualitativ)?
- Stellen Sie als zweites die stärkste Dämpfung ein, die möglich ist. Wiederholen Sie die obige Messung.
- Stellen Sie nun eine Dämpfung ein, die zwischen den beiden obigen Dämpfungen liegt (der linke der beiden Bremsmagnete soll zur Hälfte in die Scheibenfläche ragen). **Verändern Sie diese Dämpfungseinstellung nun bitte nicht mehr, bis Aufgabe 4 abgeschlossen ist!**

Aufgabe 3 – Quantitative Analyse der gedämpften Eigenschwingung Im Folgenden sollen nun die wesentlichen Parameter bestimmt werden, die die gedämpfte Eigenschwingung (siehe Gleichung 9.4) quantitativ charakterisieren: die Eigenfrequenz f_0 und die Abklingkonstante λ

- Lenken Sie das Pendel wieder um deutlich über 90° aus und nehmen Sie das Ausschwingen auf. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T. Lesen Sie dazu die Zeitdauer für fünf komplette Schwingungen ab und teilen den Wert durch fünf (so erhalten Sie ein genaueres Ergebnis). Berechnen Sie daraus die Eigenfrequenz f_0.
- Betrachten Sie nun das Ausschwingverhalten genauer. Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen das Pendel seine Maximalauslenkungen hat (also die Umkehrpunkte in *beiden* Richtungen) und notieren Sie sowohl diese Zeitpunkte wie auch die Werte der zugehörigen Auslenkungen. Beginnen Sie dazu beim ersten Umkehrpunkt und analysieren Sie ca. 10 bis 12 Messpunkte. Tragen Sie in einer halblogarithmischen Darstellung die Beträge der Maximalauslenkungen über der Zeit auf. Sie sollten nun eine Ausgleichsgerade durch Ihre Messpunkte legen können (welche mathematische Funktion beschreibt dann das Abklingverhalten?). Lesen Sie mit Hilfe der Ausgleichsgeraden die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab, also die Zeitdauer, bis die Amplitude den halben Wert erreicht. Berechnen Sie damit die Abklingkonstante λ.

Aufgabe 4 – Erzwungene Schwingung / Resonanzkurve Nun soll das Drehpendel mit dem äußeren Antrieb zu Schwingungen angeregt werden. Dabei soll die Resonanzkurve ausgemessen und insbesondere die Halbwertsbreite ermittelt werden.

- Nehmen Sie den Motor in Betrieb und variieren Sie die Anregungsfrequenz in einem größeren Bereich um ein Gefühl für das Pendel und das Phänomen der Resonanz zu bekommen. Suchen Sie nun diejenige Anregungsfrequenz, bei der die Amplitude der Pendelauslenkung maximal ist. (Können Sie aufgrund der vorherigen Aufgabe eine Vorhersage machen, wie groß diese Resonanzfrequenz ungefähr sein wird?). Lassen Sie zu diesem Zweck den Schreiber und das Phasendiagramm mitlaufen.
- Ausgehend von der Resonanzfrequenz soll nun die Resonanzkurve gemessen werden. Stellen Sie dazu eine Reihe von Anregungsfrequenzen ein und ermitteln Sie die zugehörige Amplitude der Auslenkung. Lesen Sie dazu immer die positiven (oder

immer die negativen) Maximalauslenkungen ab. Wichtig ist, genügend Messpunkte im Bereich des Maximums der Resonanzkurve aufzunehmen, weiter entfernt davon sind weniger Messpunkte notwendig. Tragen Sie einem Diagramm die Amplituden über den zugehörigen *Kreisfrequenzen* der Anregung auf. Lesen Sie aus der Kurve die Halbwertsbreite ab (siehe Abb. 9.1) und bestimmen Sie $\Delta\omega$.

- Vergleichen Sie diesen Wert für $\Delta\omega$ mit dem Wert für λ, den Sie aus der gedämpften Eigenschwingung erhalten haben. Können Sie bestätigen, dass beide Werte (trotz des völlig unterschiedlichen experimentellen Zugangs) übereinstimmen?

Aufgabe 5 – Nichtlineares Pendel / Chaos In dieser Aufgabe sollen nun noch einige Eigenschaften eines nichtlinearen Pendels untersucht werden.

- Stellen Sie den äußeren Antrieb auf die Position, dass die Reihe der Gewindebohrungen wieder möglichst senkrecht orientiert ist. Montieren Sie nun das Messing-Zusatzgewicht an der obersten Gewindebohrung. Ziehen Sie die Schraube bitte nur leicht an!
- Wieviele Gleichgewichtslagen hat das Pendel jetzt und welcher Art sind diese (stabil / instabil)? Bestimmen Sie die zugehörigen Auslenkungen.
- Wiederholen Sie nun mit Hilfe des Kraftmessers die Messung von Aufgabe 1 und tragen Sie die Werte zusätzlich in das Diagramm von Aufgabe 1 ein (achten Sie dabei wieder auf die Vorzeichen!).
- Stellen Sie nun die Dämpfung auf den höchsten Wert ein und nehmen Sie den Motor mit einer Anregungsfrequenz von 0,5 Hz in Betrieb[6]. Das Pendel sollte nun Schwingungen um eine der stabilen Gleichgewichtslagen durchführen. Betrachten Sie das Phasendiagramm. Wie würden Sie diese Schwingung charakterisieren?
- Verringern Sie nun in kleinen Schritten die Dämpfung und betrachten Sie das Phasendiagramm. Als erstes Phänomen (auf dem Weg ins Chaos) sollten Sie beobachten können, dass das Pendel zwar noch periodisch, aber mit abwechselnd unterschiedlichen Amplituden schwingt[7]. Wenn Sie diesen Fall erzeugt habe, skizzieren Sie das Phasendiagramm in Ihr Protokollheft.
- Bei weiterer Verringerung der Dämpfung wird die Schwingung des Pendels schließlich chaotisch, zudem findet die Schwingung irgendwann nicht mehr nur um eine Gleichgewichtslage statt. Woran erkennen Sie das chaotische Verhalten?
- Eventuell finden Sie bei weiterer Verringerung der Dämpfung auch Bereiche, in denen das Pendel wieder periodisch schwingt (sogenanntes Fenster im Chaos).

Entfernen Sie nach Abschluss der Messung bitte wieder das Zusatzgewicht!

[6] Grundsätzlich macht es beim nichtlinearen Pendel Sinn, mit einer Vielzahl von Kombinationen aus Dämpfung und Anregungsfrequenz zu experimentieren. Anhand einer festen Frequenz können aber bereits viele interessante Schwingungszustände beobachtet werden.

[7] Dieses Phänomen, dass ein nichtlineares System bei Veränderung eines Parameters qualitativ sein Verhalten ändert, nennt man Bifurkation.