

ANLEITUNG ZU VERSUCH 23

# Ferromagnetische Resonanz (FMR)



erstellt von  
DR. THOMAS MEIER

Fortgeschrittenenpraktikum (FOPRA)

*Physik-Department*  
*Technische Universität München*

Anleitung zuletzt aktualisiert am: 18. September 2019

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Ferromagnetismus - eine kurze Einführung . . . . .	4
2.2	Magnetische Energien und Anisotropie . . . . .	5
2.2.1	Entmagnetisierende Energie . . . . .	5
2.2.2	Magnetokristalline Anisotropie . . . . .	8
2.2.3	Zeeman-Energie . . . . .	8
2.2.4	Gesamtenergiedichte und effektives Feld . . . . .	8
2.2.5	Auffinden der Gleichgewichtslage der Magnetisierung . . .	9
2.3	Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung . . . . .	9
2.4	Ferromagnetische Resonanz - Resonanzbedingung . . . . .	11
2.4.1	Prinzip der FMR . . . . .	11
2.4.2	Definition eines geeigneten Koordinatensystems . . . . .	12
2.4.3	Berechnung des effektiven Felds . . . . .	13
2.4.4	Lösung der linearisierten LLG . . . . .	14
2.4.5	Resonanzbedingung . . . . .	15
2.4.5.1	In-plane Konfiguration . . . . .	15
2.4.5.2	Out-of-plane Konfiguration . . . . .	15
2.4.6	Dynamische Suszeptibilitäten und Linienform der FMR . .	16
2.5	Ferromagnetische Resonanz - Dämpfung . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Experimentelle Grundlagen und Auswertung</b>	<b>19</b>
3.1	Genereller Aufbau eines FMR-Spektrometers . . . . .	19
3.2	Mikrowellentechnik . . . . .	21
3.3	Auswertung der Resonanzspektren . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Vorhandene Proben</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>24</b>
5.1	Einfluss der Messparameter . . . . .	24
5.2	Frequenzabhängigkeit in der in-plane Konfiguration an Permalloy	24
5.3	Untersuchung einer Yttrium-Eisen-Granat Probe . . . . .	25
5.3.1	In-plane Konfiguration . . . . .	25
5.3.2	Senkrechte Konfiguration . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Anforderungen an das Protokoll</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Weiterführende Literatur</b>	<b>27</b>

# 1 Einleitung

Ferromagnetische Resonanz (FMR) ist eine weit verbreitete Methode zur Charakterisierung ferromagnetischer Proben. Die magnetischen Momente in der Probe werden durch ein kleines Magnetwechselfeld mit Frequenz im Mikrowellenbereich zur Präzession um ihre Gleichgewichtslage angeregt. Aus der Resonanzfrequenz können Rückschlüsse über die magnetischen Eigenschaften der Probe gezogen werden.

Mit Hilfe der ferromagnetischen Resonanz können die Gleichgewichtslage der Magnetisierung, magnetische Anisotropien oder dynamische Eigenschaften, wie zum Beispiel das gyromagnetische Verhältnis oder die Dämpfung der Präzession der Magnetisierung untersucht werden. Die Methode der ferromagnetischen Resonanz ist dabei für ein breites Spektrum magnetischer Proben anwendbar von makroskopischen Proben bis hin zu ultradünnen Schichten mit Schichtdicken im Bereich von einzelnen Atomlagen oder auch für nanostrukturierte magnetische Bauelemente.

Aufgrund dieser Eigenschaften hat die FMR ebenfalls eine große Bedeutung in der Forschung für moderne Computertechnologie erlangt. Die Computertechnik in ihrer jetzigen Form ist nämlich in ihrer Entwicklung hin zu immer dichter gepackten und kleineren Transistoren wesentlich durch den Ohmschen Wärmeverlust in den Transistoren begrenzt, der wegen der sinkenden Größe der Transistoren zu einer immer weiteren Aufheizung der Bauelemente führt. Dieses Problem soll durch den Ersatz von Ladungsströmen durch Spinströme in sogenannten spintronischen Bauelementen zukünftig gelöst werden. In diesen Bauelementen soll Information nicht mehr durch Ladung sondern durch die Spinorientierung transportiert werden, sodass keine Ohmschen Verluste mehr auftreten. FMR kann hierbei zur Charakterisierung der jeweiligen Proben oder auch zur Erzeugung von Spinströmen zum Test von Spineffekten, wie zum Beispiel dem Spin-Hall-Effekt, verwendet werden.

Ferromagnetische Resonanz wurde experimentell zum ersten Mal unabhängig voneinander durch J. Griffiths und E. Zavoisky im Jahr 1946 realisiert [1, 2], nachdem sie bereits 1911 durch V. K. Arkad'yev zufällig beobachtet wurde.. Eine erste theoretische Beschreibung gelang C. Kittel im Jahr 1948 [3]. Das zugrundeliegende Problem der Relaxationsdynamik des Magnetisierungsvektors wurde aber bereits zuvor im Jahr 1935 von Landau und Lifshitz theoretisch behandelt, was schließlich zur Entwicklung der Grundgleichung der Magnetisierungsdynamik, der sogenannten Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung (LLG), führte [4, 5].

**Vorbereitungsaufgabe 1:** Lesen Sie die folgende Einführung in die Theorie der FMR und in den Versuchsaufbau gründlich durch und versuchen Sie alle wesentlichen Aspekte **vor der Durchführung des Versuchs** zu verstehen. Bearbeiten Sie dazu auch die anderen Aufgaben, die im folgenden Text enthalten sind.

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden theoretischen Aspekte der ferromagnetischen Resonanz verständlich gemacht werden. Begonnen wird dabei mit einer sehr kurzen Einführung in den Ferromagnetismus der 3d-Übergangsmetalle und der Einführung der wesentlichen Energiebeiträge im Ferromagneten. Im Folgenden wird dann die Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung behandelt und die Herleitung der Resonanzbedingung erklärt. Abschließend wird kurz eine phänomenologische Beschreibung der im Experiment beobachtbaren Dämpfungseffekte in Ferromagneten vorgestellt. Das gesamte Kapitel folgt in weiten Teilen [6].

### 2.1 Ferromagnetismus - eine kurze Einführung

*Few subjects in science are more difficult to understand than magnetism.*  
Encyclopedia Britannica, 1989

Was schon für den Magnetismus allgemein gilt, trifft auf den Ferromagnetismus besonders zu, da es sich bei ihm um eines der wichtigsten Alltagsphänomene handelt, das sich durch die klassische Physik nicht mehr beschreiben lässt. Die dem Ferromagnetismus zugrundeliegende Austauschwechselwirkung, die zu einer spontanen parallelen Ausrichtung der magnetischen Momente im Ferromagneten führt, ist nämlich ein rein quantenmechanisches Phänomen, das durch die Zusammenwirkung der Coulomb-Abstoßung der Elektronen mit dem Pauli-Prinzip entsteht.

Der Ferromagnetismus der sogenannten 3d-Übergangsmetalle Eisen, Kobalt und Nickel ist hierbei besonders komplex, da die magnetischen Momente durch Elektronen in 3d-Zuständen repräsentiert werden, die teilweise delokalisiert sind, sich also annähernd frei durch das Kristallgitter bewegen können. Da die exakte Erklärung mittels Bandstrukturmodellen umfangreiche Kenntnisse der Festkörperphysik erfordern würde, soll hier eine einfachere anschauliche Erklärung präsentiert werden.

Ausgehend vom Pauli-Prinzip der Quantenmechanik dürfen sich Elektronen mit gleichem Spin nicht am selben Ort befinden, da sie dann in allen Quantenzahlen übereinstimmen würden. Je näher zwei Elektronen aneinander sind, desto größer wird ihre Coulomb-Energie wegen der Abstoßung ihrer gleichen Ladungen. Wenn wir nun annehmen, dass die Elektronen den selben Spinzustand besitzen, so ist es durch das Pauli-Prinzip verboten, dass sich die Elektronen am selben Ort befinden. Daher steigt für Elektronen mit parallelem Spin der mittlere Abstand der Elektronen und die Coulomb-Energie wird minimiert. Nach dieser Überlegung wäre es für alle Metalle von Vorteil spontan parallele Spins, also Ferromagnetismus auszubilden. Es muss also noch einen entgegengesetzten Effekt geben, der die parallele Ausrichtung der Spins energetisch benachteiligt. Dies kann ebenfalls anschaulich durch das Pauli-Prinzip erklärt werden. Besitzen die Elektronen parallelen Spin so dürfen nach dem Pauli-Prinzip natürlich auch die

Impulse der Elektronen nicht übereinstimmen, da die Elektronen sonst wiederum in allen Quantenzahlen gleich wären. Da die Zustände mit niedrigem Impuls bereits alle besetzt sind, müssen beim Übergang von entgegengesetzten zu parallelen Spins Zustände mit höherem Impuls als vorher besetzt werden, sodass die mittlere kinetische Energie der Elektronen steigt. Absatz basierend auf [7–9].

Bei den meisten Metallen übersteigt die Erhöhung der kinetischen Energie die Reduktion der Coulomb-Energie, sodass sich keine spontane parallele Anordnung der Spins, also kein Ferromagnetismus, ergibt. Nur für sehr wenige Materialien ist die parallele Anordnung der Spins günstiger, wie zum Beispiel Eisen, Kobalt und Nickel. Diese Materialien werden unterhalb einer charakteristischen Temperatur, der Curie-Temperatur  $T_C$ , ferromagnetisch und zeigen eine spontane parallele Ausrichtung benachbarter Spins [8, 9].

## 2.2 Magnetische Energien und Anisotropie

In dieser Sektion werden die wichtigsten Energiebeiträge in ferromagnetischen Proben erläutert. Für die in diesem Praktikumsversuch betrachteten Proben soll hierbei die sogenannte Makrospinnäherung Anwendung finden. Bei dieser wird angenommen, dass alle magnetischen Momente in der Probe durch die Austauschwechselwirkung parallel ausgerichtet sind, und sich der magnetische Zustand der Probe daher durch einen einzigen Magnetisierungsvektor beschreiben lässt [10, 11]. Diese Näherung ist im Allgemeinen nur für dünne Proben, die in der Probenebene uniform magnetisiert sind, geeignet.

Der erste Energiebeitrag im Ferromagneten ist die Austauschenergie, die umso größer ist, je stärker die magnetischen Momente von der parallelen Ausrichtung abweichen. Da hier die Makrospinnäherung benutzt wird, bei der alle Momente immer parallel sind, ist die Austauschenergie konstant und braucht nicht weiter betrachtet zu werden.

### 2.2.1 Entmagnetisierende Energie

Als erster für das Experiment relevante Energiebeitrag soll die entmagnetisierende Energie eingeführt werden. Diese kann als direkte Folge der Maxwell-Gleichungen in einem spontan magnetisierten Körper betrachtet werden.

Wie aus den Vorlesungen zur Elektrodynamik bereits bekannt sein sollte, benötigt man zur Beschreibung eines ferromagnetischen Materials zwei magnetische Feldgrößen. Die Eine ist die magnetische Induktion  $\vec{B}$ , die Andere das magnetische Feld  $\vec{H}$ . Diese beiden Feldgrößen sind mit der Magnetisierung über eine einfache Gleichung verbunden [8]:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1)$$

In dieser Praktikumsanleitung sollen SI-Einheiten statt der in der FMR-Theorie häufig noch gebräuchlichen cgs-Einheiten benutzt werden. Die Einheit für die

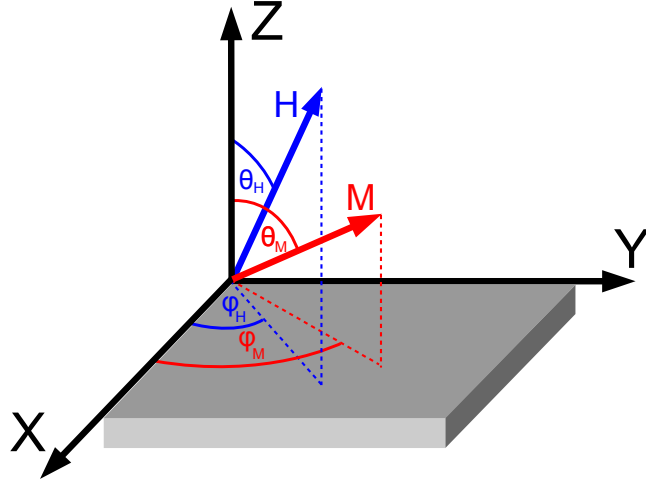


Abbildung 1: Die Abbildung zeigt das Koordinatensystem XYZ der Probe, das bei den Berechnungen zum entmagnetisierenden Feld einer dünnen Schicht und bei der Berechnung der Energiedichten Verwendung findet. In der Graphik sind auch die Winkel zur Beschreibung der Magnetisierung  $\vec{M}$  und des magnetischen Felds  $\vec{H}$  eingetragen.

magnetische Induktion ist daher  $[B] = 1 \text{ T}$  (Tesla) und für das magnetische Feld ist  $[H] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ .

Außerdem gilt für das B-Feld die folgende Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

Das magnetische Feld  $\vec{H}$  ist im Gegensatz zur magnetischen Induktion  $\vec{B}$  nicht quellenfrei. Durch Einsetzen von Gleichung (1) in Gleichung (2) erhält man die Divergenz von  $\vec{H}$ , die im Allgemeinen nicht verschwindet.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (3)$$

Das  $\vec{H}$ -Feld lässt sich in eine Summe aus zwei Feldern zerlegen [8].

$$\vec{H} = \vec{H}_{\text{ex}} + \vec{H}_{\text{d}} \quad (4)$$

Der erste Teil ist das externe Feld  $H_{\text{ex}}$ , das von Strömen oder anderen Magneten verursacht wird, der zweite Teil  $\vec{H}_{\text{d}}$  heißt entmagnetisierendes Feld innerhalb der Probe und Streufeld außerhalb der Probe [8].

Die Zerlegung wird dabei so gewählt, dass das entmagnetisierende Feld ein konservatives Feld ist und sich daher als Gradient eines Potentials darstellen lässt, das von sogenannten magnetischen Ladungen erzeugt wird. Analog zur ersten

Maxwell-Gleichung für das elektrische Feld  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  mit der Ladungsdichte  $\rho$  lässt sich durch Vergleich mit Gleichung (3) die Dichte der magnetischen Ladungen  $\rho_m$  identifizieren [8].

$$\rho_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad (5)$$

Bei einer homogen magnetisierten Probe sitzen die magnetischen Ladungen also auf der Grenzfläche, da sich dort die Magnetisierung ändert ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$ ). Das entmagnetisierende Feld wirkt entgegengesetzt zur Magnetisierung, was den Namen erklärt [12].

Für ellipsoidförmige homogen magnetisierte Proben lässt sich das entmagnetisierende Feld exakt berechnen. Es stellt sich heraus, dass das entmagnetisierende Feld linear mit der Magnetisierung zusammenhängt und daher ebenfalls homogen ist [8, 13].

$$\vec{H}_d = -\mathcal{N}\vec{M}, \quad (6)$$

mit dem Entmagnetisierungstensor  $\mathcal{N}$ , wobei die Spur des Entmagnetisierungstensors  $\text{Tr}(\mathcal{N}) = 1$  ist [8].

Bei einem dünnen, weit ausgedehnten Film sind Länge und Breite viel größer als die Dicke. Daher können die Komponenten des entmagnetisierenden Felds parallel zur Oberfläche (X- und Y-Richtung) vernachlässigt werden, da die magnetischen Ladungen sehr weit voneinander entfernt sind [11, 12]. Dies entspricht  $\mathcal{N}_{XX} = 0$  und  $\mathcal{N}_{YY} = 0$ . Da die Spur des Entmagnetisierungstensors Eins ist, muss  $\mathcal{N}_{ZZ} = 1$  gelten.

Die entmagnetisierende Energie ist nun die Energie einer ferromagnetischen Probe in ihrem eigenen entmagnetisierenden Feld. Bei einer Änderung der Magnetisierung um  $d\vec{M}$  in einem beliebigen Magnetfeld  $\vec{H}$  beträgt die Änderung der Energiedichte  $d\epsilon$ :

$$d\epsilon = -\mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (7)$$

Zur Berechnung der Entmagnetisierungsenergiedichte wird nun das entmagnetisierende Feld aus Gleichung (6) in die letzte Gleichung an Stelle von  $\vec{H}$  eingesetzt. Der Magnetisierungsvektor wird danach in Betrag und Richtung aufgespalten, so dass  $\vec{M} = M\vec{m}$  gilt mit dem Betrag der Magnetisierung  $M$  und dem Einheitsrichtungsvektor  $\vec{m}$ . Für eine bis zur Sättigung magnetisierte Probe muss nun die obige Gleichung von 0 bis zur Sättigungsmagnetisierung  $M_S$  in  $M$  integriert werden und es folgt der gesuchte Ausdruck:

$$\epsilon_{\text{dem}} = \frac{1}{2} \mu_0 M_S^2 \vec{m}(\mathcal{N}\vec{m}) \quad (8)$$

**Vorbereitungsaufgabe 2:** Vollziehen Sie die im vorigen Abschnitt angedeutete Herleitung exakt nach und berechnen Sie die Entmagnetisierungsenergiedichte eines dünnen Films in Abhängigkeit des Winkels  $\theta_M$  (siehe Abb. 1). Welche Gleichgewichtsorientierung der Magnetisierung wird durch die entmagnetisierende Energie in einem dünnen Film bevorzugt?

## 2.2.2 Magnetokristalline Anisotropie

Unter magnetokristalliner Anisotropie versteht man, dass in einem ferromagnetischen Körper bestimmte Ausrichtungen der Magnetisierung energetisch bevorzugt sind [11]. Die bevorzugten Richtungen werden von der Symmetrie und Struktur des Kristallgitters bestimmt [8, 11, 12]. Die physikalische Ursache der Anisotropie liegt in der Spin-Bahn-Wechselwirkung. Durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung wird die Bahnbewegung der Elektronen mit ihrem Spin gekoppelt [8, 11].

Während die in diesem Versuch untersuchten Permalloy-Proben aufgrund der speziell abgestimmten Zusammensetzung dieser Ni/Fe-Legierung keine Anisotropien aufweisen sollten, ist das Auftreten solcher magnetokristalliner Anisotropien vor allem für epitaktisch aufgewachsene kristalline Filme typisch. Die einfachste Form einer Anisotropie ist eine uniaxiale, aus der Probenebene herauszeigende Anisotropie, die durch folgende Formel beschrieben wird

$$\epsilon_{\text{ani}} = -K_{\text{U}}^{\perp} m_{\text{Z}}^2. \quad (9)$$

Dabei ist  $K_{\text{U}}^{\perp}$  die zugehörige Anisotropiekonstante (Einheit:  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$ ) und  $m_{\text{Z}}$  die Z-Komponente des Einheitsmagnetisierungsvektors (Koordinatensystem siehe Abb. 1). Diese Art der Anisotropie tritt häufig durch Grenzflächeneffekte oder Verspannungen bei ultradünnen Filmen auf und kann so stark werden, dass die Gleichgewichtslage der Magnetisierung senkrecht zur Probenebene liegt.

## 2.2.3 Zeeman-Energie

Befindet sich eine magnetisierte Probe in einem externen Magnetfeld  $\vec{H}_{\text{ex}}$  so wechselwirken die magnetischen Momente der Probe mit dem äußeren Feld und die parallele Ausrichtung der Magnetisierung und des externen Felds ist energetisch günstiger. Der zugehörige Term in der Energiedichte heißt Zeeman-Term und lautet:

$$\epsilon_{\text{zee}} = -\mu_0 M_{\text{S}} \vec{H}_{\text{ex}} \cdot \vec{m} \quad (10)$$

## 2.2.4 Gesamtenergiedichte und effektives Feld

Die Gesamtenergiedichte wird berechnet als Summe von Entmagnetisierungs-, Anisotropie- und Zeeman-Energiedichte.

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mu_0 M_{\text{S}}^2 m_{\text{Z}}^2 - K_{\text{U}}^{\perp} m_{\text{Z}}^2 - \mu_0 M_{\text{S}} \vec{H}_{\text{ex}} \cdot \vec{m} \quad (11)$$

Für die weiteren theoretischen Betrachtungen ist das effektive Magnetfeld  $\vec{H}_{\text{EFF}}$  von großer Bedeutung. Es wird berechnet durch Bilden des Gradienten der Gesamtenergiedichte bezüglich der Koordinaten der Magnetisierung  $\vec{M}$  [10–12].

$$\mu_0 \vec{H}_{\text{EFF}} = -\frac{1}{M_{\text{S}}} \vec{\nabla}_{\vec{m}} \epsilon \quad (12)$$



**Vorbereitungsaufgabe 3:** Berechnen Sie das effektive Feld.

### 2.2.5 Auffinden der Gleichgewichtslage der Magnetisierung

Die Gleichgewichtslage der Magnetisierung ist gegeben durch ein Minimum der Gesamtenergiedichte in Gleichung (11) **unter der Nebenbedingung, dass der Betrag des Einheitsmagnetisierungsvektors 1 ist**. Zu diesem Zweck bietet es sich an  $\vec{m}$  und das externe Magnetfeld  $\vec{H}_{\text{ex}}$  in Kugelkoordinaten zu parametrisieren gemäß Abbildung 1. Danach wird nach den Winkeln  $\theta_M$  und  $\varphi_M$  abgeleitet und beide Ableitungen werden null gesetzt.

**Vorbereitungsaufgabe 4:** Ermitteln Sie die Gleichgewichtslage der Magnetisierung gemäß der obigen Anleitung.

Am Ende sollten Sie folgendes Ergebnis erhalten:

$$M_{\text{eff}} \cos(\theta_M) \sin(\theta_M) + H_0 \sin(\theta_H - \theta_M) = 0 \quad (13)$$

$$\varphi_H = \varphi_M, \quad (14)$$

wobei  $H_0$  der Betrag des externen Magnetfelds ist und die effektive Magnetisierung  $M_{\text{eff}} = M_S - \frac{2K_U^\perp}{\mu_0 M_S}$  eingeführt wurde.

Wichtig ist hierbei zu verstehen, dass in einer ferromagnetischen Probe durch Anisotropien die Richtungen der **Magnetisierung und des externen Magnetfelds** im Allgemeinen **nicht parallel sind**.

## 2.3 Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung

Nachdem in den bisherigen Überlegungen immer eine zeitlich konstante Magnetisierung angenommen wurde, soll nun die Zeitentwicklung des Magnetisierungsvektors untersucht werden. Wenn man die Magnetisierung einer dünnen Schicht zum Beispiel durch ein externes Feld aus der Gleichgewichtslage auslenkt, dann kann man eine Präzession der Magnetisierung um das effektive Magnetfeld beobachten. Dabei kehrt die Magnetisierung auf einer spiralförmigen Bahn wieder in ihre Gleichgewichtslage zurück, in der sie parallel zum effektiven Magnetfeld ist [11, 12]. Die Zeitskala für diesen Vorgang liegt im Nanosekundenbereich [11, 12]. Dieses Verhalten der Magnetisierung wurde bereits 1935 von Landau und Lifschitz theoretisch durch die Landau-Lifschitz-Gleichung beschrieben [4].

Der erste Teil der Landau-Lifschitz-Gleichung beschreibt die Präzession der Magnetisierung um des effektive Magnetfeld [4, 12].

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\mu_0 \vec{M} \times \vec{H}_{\text{eff}} \quad (15)$$

Hier bezeichnet  $\gamma = \frac{eg}{2m_e}$  das gyromagnetische Verhältnis des Elektrons mit der Elementarladung  $e$ , der Elektronenmasse  $m_e$  und dem g-Faktor  $g$ , der für freie

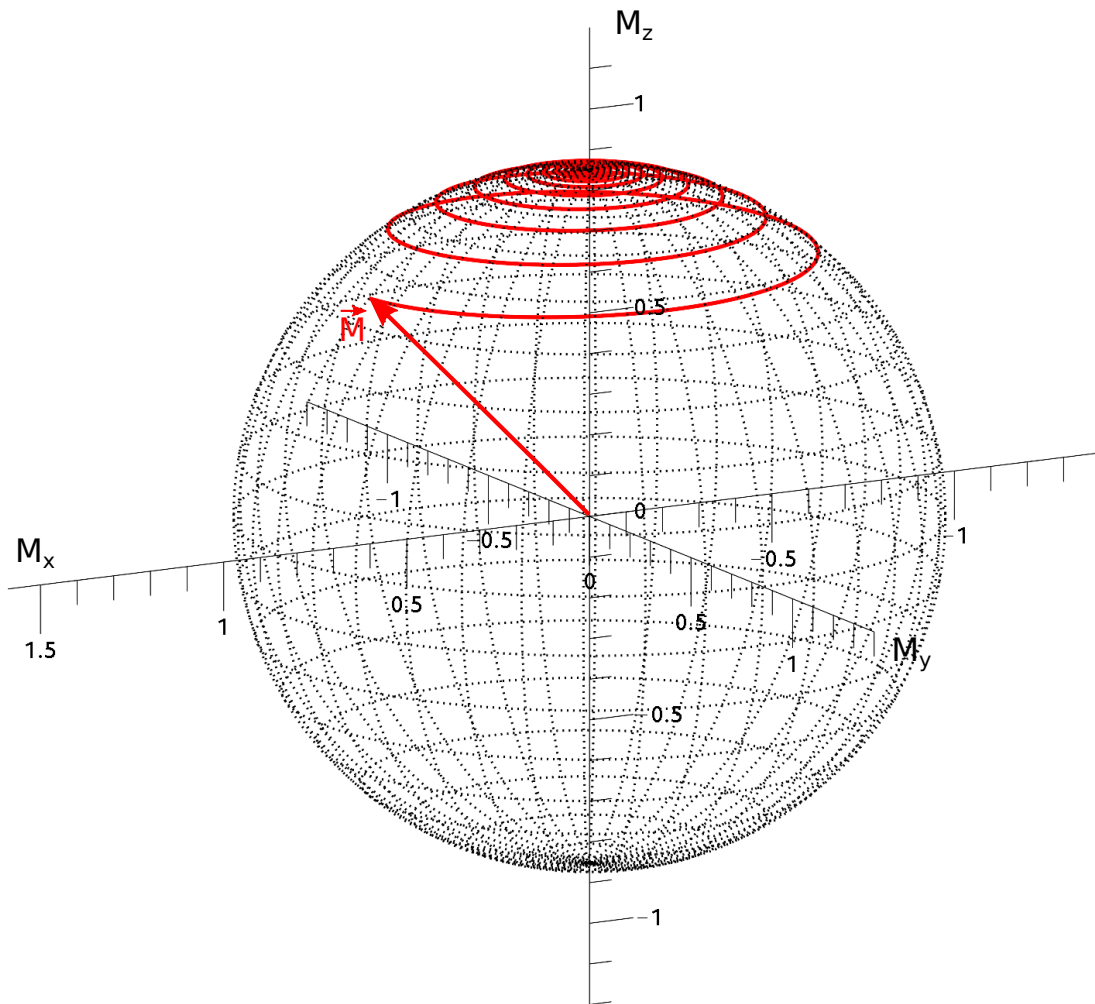


Abbildung 2: Numerische Lösung der Landau-Lifschitz-Gilbert-Gleichung für  $\gamma = 200 \frac{\text{GHz}}{\text{T}}$ ,  $\alpha = 0,05$  und  $\mu_0 M_S = 0,852 \text{ T}$ . Beachten Sie, dass hier zur besseren Visualisierung eine sehr hohe Dämpfung gewählt wurde. Das effektive Feld zeigt in z-Richtung mit einer konstanten Stärke von 1 T. Man erkennt die spiralförmige Präzession der Magnetisierung hin zur Gleichgewichtslage in z-Richtung (rote Linie). Außerdem ist durch die schwarzen gepunkteten Linien eine Kugeloberfläche angedeutet.

Elektronen ungefähr 2,0023 ist. Diese Gleichung beschreibt im Allgemeinen eine elliptische Präzession der Magnetisierung um das effektive Magnetfeld.

Die obige Gleichung kann allerdings noch nicht beschreiben, dass die Magnetisierung in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, es fehlt ein Dämpfungsmechanismus. Bereits Landau und Lifschitz haben in ihre Gleichung einen Dämpfungsterm eingefügt [4]. Da dieser Term aber für große Dämpfungen ein physikalisch inkorrektes Verhalten liefert, führte Gilbert 1955 einen verbesserten Dämpfungsterm ein, der das richtige physikalische Verhalten liefert [5, 12]. Durch Addition dieses Dämpfungsterms an Gleichung (15) erhält man die Landau-Lifschitz-Gilbert-Gleichung (LLG). [11, 12]

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma\mu_0 \vec{m} \times \vec{H}_{\text{eff}} + \alpha \vec{m} \times \frac{d\vec{m}}{dt} \quad (16)$$

Hier wurde der Einheitsmagnetisierungsvektor  $\vec{m} = \vec{M}/M_S$  verwendet und der Gilbert-Dämpfungsparameter  $\alpha$  eingeführt, der die Stärke der Dämpfung angibt. Der zweite Term der Summe wird Gilbert-Dämpfungsterm genannt und führt zur Relaxation der Magnetisierung in die Gleichgewichtslage [12]. Abbildung 2 zeigt eine numerische Lösung der LLG.

Unter dem Einfluss der LLG bewegt sich die Magnetisierung grundsätzlich auf einer Kugeloberfläche [11].

**Vorbereitungsaufgabe 5:** Überlegen Sie sich in welche Richtung die einzelnen Beiträge zur LLG zeigen. Begründen Sie rechnerisch und anschaulich, warum sich die Magnetisierung immer auf einer Kugeloberfläche bewegen muss.

## 2.4 Ferromagnetische Resonanz - Resonanzbedingung

### 2.4.1 Prinzip der FMR

Wie schon in der Einleitung angedeutet kann man durch Messungen der ferromagnetischen Resonanz bestimmte Eigenschaften magnetischer Materialien, wie den g-Faktor oder den Gilbert-Dämpfungsparameter  $\alpha$  oder die magnetischen Anisotropien, ermitteln [10, 11].

Bei einem FMR-Experiment wird die Präzession der Magnetisierung mit einem Hochfrequenzmagnetfeld im Mikrowellenbereich angeregt. Die Probe befindet sich dabei in einem externen zeitunabhängigen Magnetfeld  $\vec{H}_0$ . Durch die Präzession der Magnetisierung um das effektive Feld wird Energie aus dem Mikrowellenfeld absorbiert. Ferromagnetische Resonanz tritt bei einer fest vorgegebenen Mikrowellenkreisfrequenz  $\omega$  in einem bestimmten äußeren Magnetfeld  $H_{\text{FMR}}$  auf und wird durch ein Maximum der Mikrowellenabsorption detektiert. Die Auswertung der FMR-Messungen konzentriert sich auf die Resonanzposition und die Linienbreite der gemessenen Resonanzkurve.

### 2.4.2 Definition eines geeigneten Koordinatensystems

Um die Berechnung der Resonanzbedingung in den folgenden Unterkapiteln zu vereinfachen, soll ein geeignetes Koordinatensystem eingeführt werden. Wie bereits in den vorherigen Kapiteln wird mit XYZ das Koordinatensystem bezeichnet, dessen z-Achse normal zur Probenebene ist. Ebenso wird wieder der Winkel  $\theta_M$  der Magnetisierung bezüglich der Z-Achse und der Winkel  $\varphi_M$  zwischen der Projektion der Magnetisierung in die X-Y-Ebene und der X-Achse verwendet. Für die Berechnung der Resonanzbedingung der FMR ist das Koordinatensystem XYZ nicht zweckmäßig und daher wird im Folgenden das Koordinatensystem xyz benutzt, dessen x-Achse in Richtung von  $\vec{M}$  zeigt. In Abb. 3 sind die beiden Koordinatensysteme und der Magnetisierungsvektor dargestellt.

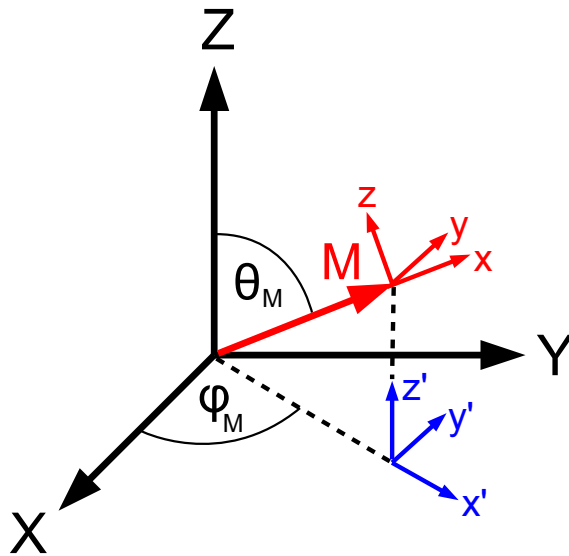


Abbildung 3: In dieser Abbildung sind die beiden für die weiteren Berechnungen benötigten Koordinatensysteme, ein Hilfskoordinatensystem und der Magnetisierungsvektor dargestellt.

Die Koordinatentransformation vom System XYZ ins System xyz, mit der ein Vektor im System XYZ ins System xyz überführt werden kann, ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = T_{XYZ}^{xyz} \begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_M \cos \varphi_M & \sin \theta_M \sin \varphi_M & \cos \theta_M \\ -\sin \varphi_M & \cos \varphi_M & 0 \\ -\cos \theta_M \cos \varphi_M & -\cos \theta_M \sin \varphi_M & \sin \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} \quad (17)$$

Bei den folgenden Berechnungen wird auch die Transformation vom System xyz ins System XYZ benötigt. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} &= T_{xyz}^{XYZ} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta_M \cos \varphi_M & -\sin \varphi_M & -\cos \theta_M \cos \varphi_M \\ \sin \theta_M \sin \varphi_M & \cos \varphi_M & -\cos \theta_M \sin \varphi_M \\ \cos \theta_M & 0 & \sin \theta_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

**Vorbereitungsaufgabe 6:** Machen Sie sich auf Basis Ihrer Kenntnisse der linearen Algebra klar, wie diese beiden Transformationsmatrizen zustande kommen. Nutzen Sie dazu Abb. 3. Sie müssen die Transfermatrizen nicht exakt berechnen.

### 2.4.3 Berechnung des effektiven Felds

Das effektive Feld, das von Ihnen bereits in einer Vorbereitungsaufgabe im Koordinatensystem XYZ berechnet wurde, muss nun in das für die FMR relevante Koordinatensystem xyz überführt werden. Dies geschieht durch Multiplikation mit der Transfermatrix in Gleichung 17, sodass  $\mu_0 \vec{H}_{\text{eff}} = T_{XYZ}^{xyz} (\mu_0 \vec{H}_{\text{EFF}})$ . Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu_0 H_{\text{eff},x} &= \mu_0 \sin(\theta_M) \cos(\varphi_M) H_{\text{ex},X} + \mu_0 \sin(\theta_M) \sin(\varphi_M) H_{\text{ex},Y} + \\ &\quad \mu_0 \cos(\theta_M) H_{\text{ex},Z} - \mu_0 \cos(\theta_M) M_{\text{eff}} m_Z \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mu_0 H_{\text{eff},y} = -\mu_0 \sin(\varphi_M) H_{\text{ex},X} + \mu_0 \cos(\varphi_M) H_{\text{ex},Y} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 H_{\text{eff},z} &= -\mu_0 \cos(\theta_M) \cos(\varphi_M) H_{\text{ex},X} - \mu_0 \cos(\theta_M) \sin(\varphi_M) H_{\text{ex},Y} + \\ &\quad \mu_0 \sin(\theta_M) H_{\text{ex},Z} - \mu_0 \sin(\theta_M) M_{\text{eff}} m_Z \end{aligned} \quad (21)$$

Hierbei muss nun noch die Magnetisierungskomponente  $m_Z$  durch die Magnetisierungskomponenten im Koordinatensystem xyz ersetzt werden. Dies geschieht durch Benutzung der Rücktransformation  $T_{xyz}^{XYZ}$  aus Gleichung (18), sodass

$$m_Z = \cos(\theta_M) m_x + \sin(\theta_M) m_z \quad (22)$$

gilt. Außerdem soll das statische externe Feld  $\vec{H}_0$  durch Kugelkoordinaten ausgedrückt und ein kleines Mikrowellenanregungsfeld  $\vec{h}$  mit der Kreisfrequenz  $\omega$  addiert werden.

$$\vec{H}_{\text{ex}} = \begin{pmatrix} H_0 \sin(\theta_H) \cos(\varphi_H) \\ H_0 \sin(\theta_H) \sin(\varphi_H) \\ H_0 \cos(\theta_H) \end{pmatrix} + \vec{h} \exp(i\omega t) \quad (23)$$

Unter Benutzung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen lässt sich das effektive Feld nach Einsetzen der Gleichungen (22) und (23) zu

folgendem Ausdruck vereinfachen:

$$\mu_0 H_{\text{eff},x} = \mu_0 H_0 (\sin(\theta_M) \sin(\theta_H) \cos(\varphi_H - \varphi_M) + \cos(\theta_M) \cos(\theta_H)) - \mu_0 M_{\text{eff}} \cos(\theta_M) (\cos(\theta_M) m_x + \sin(\theta_M) m_z) + \mu_0 h_x \exp(i\omega t) \quad (24)$$

$$\mu_0 H_{\text{eff},y} = \mu_0 H_0 \sin(\theta_M) \sin(\varphi_H - \varphi_M) + \mu_0 h_y \exp(i\omega t) \quad (25)$$

$$\mu_0 H_{\text{eff},z} = \mu_0 H_0 (-\cos(\theta_M) \sin(\theta_H) \cos(\varphi_H - \varphi_M) + \sin(\theta_M) \cos(\theta_H)) - \mu_0 M_{\text{eff}} \sin(\theta_M) (\cos(\theta_M) m_x + \sin(\theta_M) m_z) + \mu_0 h_z \exp(i\omega t) \quad (26)$$

In FMR-Experimenten ist die Mikrowellenanregung normalerweise so klein, dass die Magnetisierung niemals stark aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt wird (d.h.  $m_x \approx 1$  und  $m_y, m_z \ll 1$ ), sodass sich unter Benutzung der in Abschnitt 2.2.5 gefunden Gleichgewichtslage der Magnetisierung das effektive Feld weiter vereinfachen lässt [12].

$$\mu_0 H_{\text{eff},x} = \mu_0 H_0 \cos(\theta_H - \theta_M) - \mu_0 M_{\text{eff}} \cos(\theta_M) (\cos(\theta_M) m_x + \sin(\theta_M) m_z) + \mu_0 h_x \exp(i\omega t) \quad (27)$$

$$\mu_0 H_{\text{eff},y} = \mu_0 h_y \exp(i\omega t) \quad (28)$$

$$\mu_0 H_{\text{eff},z} = -\mu_0 M_{\text{eff}} \sin^2(\theta_M) m_z + \mu_0 h_z \exp(i\omega t) \quad (29)$$

#### 2.4.4 Lösung der linearisierten LLG

Die getriebene Bewegung des Magnetisierungsvektors unter einem hochfrequenten Magnetfeld wird durch die Landau-Lifshitz-Gilbert Gleichung beschrieben. Da diese eine nichtlineare Differentialgleichung ist, ist eine analytische Lösung im Allgemeinen nicht möglich. Für kleine Anregungsfelder  $\vec{h}$  ist aber eine Linearisierung gemäß dem folgenden Ansatz für den Einheitsmagnetisierungsvektor möglich.

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{m}_y \exp(i\omega t) \\ \mathbf{m}_z \exp(i\omega t) \end{pmatrix} \quad (30)$$

**Vorbereitungsaufgabe 7:** Setzen Sie den Ansatz aus Gleichung (30) in die LLG (16) ein und vereinfachen Sie soweit wie möglich (ohne das effektive Feld explizit einzusetzen). Linearisieren Sie die erhaltenen Gleichungen für alle Komponenten soweit möglich (d.h. vernachlässigen Sie quadratische Ordnungen in  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$ ).

In das von Ihnen berechnete Ergebnis wird nun das effektive Feld aus den Gleichungen (27) bis (29) eingesetzt und es werden wiederum alle quadratischen Ordnungen in  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  vernachlässigt. Ferner können aufgrund des kleinen Mikrowellenanregungsfeldes auch Mischterme zwischen den Komponenten von  $\vec{h}$  und  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  vernachlässigt werden. Mit diesen Vereinfachungen fällt die x-Komponente der LLG trivial und es verbleiben folgende zwei Gleichungen [10–12]:

$$0 = i\frac{\omega}{\gamma}\mathbf{m}_y + \left( \mathfrak{B}_{\text{eff}} + \alpha i\frac{\omega}{\gamma} \right) \mathbf{m}_z - \mu_0 h_z \quad (31)$$

$$0 = -i\frac{\omega}{\gamma}\mathbf{m}_z + \left( \mu_0 \mathfrak{H}_{\text{eff}} + \alpha i\frac{\omega}{\gamma} \right) \mathbf{m}_y - \mu_0 h_y \quad (32)$$

Hierbei wurden die effektive magnetische Induktion  $\mathfrak{B}_{\text{eff}}$  und das effektive Magnetfeld  $\mathfrak{H}_{\text{eff}}$  eingeführt, sodass [10–12]

$$\mathfrak{B}_{\text{eff}} = \mu_0 H_0 \cos(\theta_H - \theta_M) - \mu_0 M_{\text{eff}} \cos(2\theta_M) \quad (33)$$

$$\mu_0 \mathfrak{H}_{\text{eff}} = \mu_0 H_0 \cos(\theta_H - \theta_M) - \mu_0 M_{\text{eff}} \cos^2(\theta_M) . \quad (34)$$

**Vorbereitungsaufgabe 8:** Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nach  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  auf.

### 2.4.5 Resonanzbedingung

Die Resonanzbedingung der FMR kann aus den Ergebnissen für  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  abgelesen werden. Vernachlässigt man die in der Regel sehr kleine Dämpfung  $\alpha$ , so ist das Maximum der Präzessionsamplitude der Magnetisierung durch die Nullstelle des Nenners von  $\mathbf{m}_y$  oder  $\mathbf{m}_z$  gegeben. Dies führt im Allgemeinen zur folgenden Resonanzbedingung, die die Mikrowellenkreisfrequenz angibt, für die bei einem bestimmten Magnetfeld  $H_{\text{FMR}}$  Resonanz auftritt [10–12]:

$$\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2 = \mu_0 \mathfrak{B}_{\text{eff}} \mathfrak{H}_{\text{eff}} \Big|_{H_0 = H_{\text{FMR}}} \quad (35)$$

Im Folgenden werden die zwei wichtigsten Spezialfälle behandelt:

**2.4.5.1 In-plane Konfiguration** Bei der in-plane Konfiguration liegen sowohl das externe Feld als auch die Magnetisierung in der Probenebene ( $\theta_H = 90^\circ$  und  $\theta_M = 90^\circ$ ) und sind parallel ( $\varphi_H = \varphi_M$ ). Es dürfen keine in-plane Anisotropien in der Probe vorhanden sein. Durch Einsetzen dieser Winkel in Gleichung (33) und (34) wird folgende Resonanzbedingung gefunden, die aufgrund ihrer Entdeckung durch C. Kittel im Jahr 1948 auch als Kittel-Formel bekannt ist [3]:

$$\frac{\omega}{\gamma} = \sqrt{\mu_0 H_{\text{FMR}} (\mu_0 H_{\text{FMR}} + \mu_0 M_{\text{eff}})} \quad (36)$$

**2.4.5.2 Out-of-plane Konfiguration** Hierbei wird ein aus der Probenebene heraus zeigendes Magnetfeld angelegt  $\theta_H = 0^\circ$ . Es wird angenommen, dass Magnetisierung und externes Feld dabei parallel sind. Für in-plane magnetisierte Proben wird dies durch Anlegen eines sehr hohen externen Felds, in dem die Probe gesättigt ist, gewährleistet, für out-of-plane magnetisierte Proben ist die

Annahme immer erfüllt. Durch Nullsetzen der Winkel in Gleichung (33) und (34) wird folgende Resonanzbedingung erhalten:

$$\frac{\omega}{\gamma} = \mu_0 H_{\text{FMR}} - \mu_0 M_{\text{eff}} \quad (37)$$

**Vorbereitungsaufgabe 9:** Verifizieren Sie die hier dargestellten Resonanzbedingungen anhand Ihrer Ergebnisse für  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$ .

### 2.4.6 Dynamische Suszeptibilitäten und Linienform der FMR

Während im letzten Unterkapitel die Position der ferromagnetischen Resonanz hergeleitet wurde, soll nun die Form der im Versuch gemessenen Absorptionskurven hergeleitet werden. Zuerst werden dafür die dynamischen Suszeptibilitäten definiert durch

$$\vec{\mathbf{m}} = \chi \vec{h} \quad (38)$$

mit dem Suszeptibilitätstensor  $\chi$ .

Indem man die Ergebnisse für  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  aus dem vorherigen Unterkapitel benutzt, können nun die Komponenten des Suszeptibilitätstensors bestimmt werden.

$$\chi_{yy} = \frac{-\mu_0 \left( \mathfrak{B}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right)}{\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2 - \left( \mathfrak{B}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right) \left( \mu_0 \mathfrak{H}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right)} \quad (39)$$

$$\chi_{yz} = -\chi_{zy} = \frac{-\mu_0 \frac{i\omega}{\gamma}}{\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2 - \left( \mathfrak{B}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right) \left( \mu_{\text{eff}} \mathfrak{H}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right)} \quad (40)$$

$$\chi_{zz} = \frac{-\mu_0 \left( \mathfrak{H}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right)}{\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2 - \left( \mathfrak{B}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right) \left( \mu_0 \mathfrak{H}_{\text{eff}} + \frac{i\alpha\omega}{\gamma} \right)} \quad (41)$$

Die Mikrowellenabsorption in der Probe und damit die gemessene Linienform ist dabei durch den Imaginärteil der Suszeptibilitäten gegeben. Im Folgenden wird exemplarisch die Linienform von  $\chi_{yy}$  hergeleitet. Die Berechnungen können für die anderen Suszeptibilitäten in analoger Weise ausgeführt werden.

Dabei wird von Gleichung (39) für  $\chi_{yy}$  ausgegangen. Für  $\left( \frac{\omega}{\gamma} \right)^2$  wird die Resonanzbedingung aus Gleichung (35) eingesetzt. Danach werden Zähler und Nenner um das Resonanzfeld  $H_{\text{FMR}}$  herum in  $H_0$  bis zur linearen Ordnung entwickelt und Terme, die proportional zu  $\alpha(H_0 - H_{\text{FMR}})$  oder  $\alpha^2$  sind, vernachlässigt. Damit ergibt sich:

$$\chi_{yy} = \frac{\mu_0 \left( \mathfrak{B}_{\text{FMR}} + \left. \frac{\partial \mathfrak{B}_{\text{eff}}}{\partial H_0} \right|_{H_0=H_{\text{FMR}}} \delta H + i\mu_0 \Delta H \right)}{\left( \mathfrak{B}_{\text{FMR}} \left. \frac{\partial \mathfrak{H}_{\text{eff}}}{\partial H_0} \right|_{H_0=H_{\text{FMR}}} + \mathfrak{H}_{\text{FMR}} \left. \frac{\partial \mathfrak{B}_{\text{eff}}}{\partial H_0} \right|_{H_0=H_{\text{FMR}}} \right) \mu_0 \delta H + (\mathfrak{B}_{\text{FMR}} + \mu_0 \mathfrak{H}_{\text{FMR}}) i\mu_0 \Delta H} \quad (42)$$



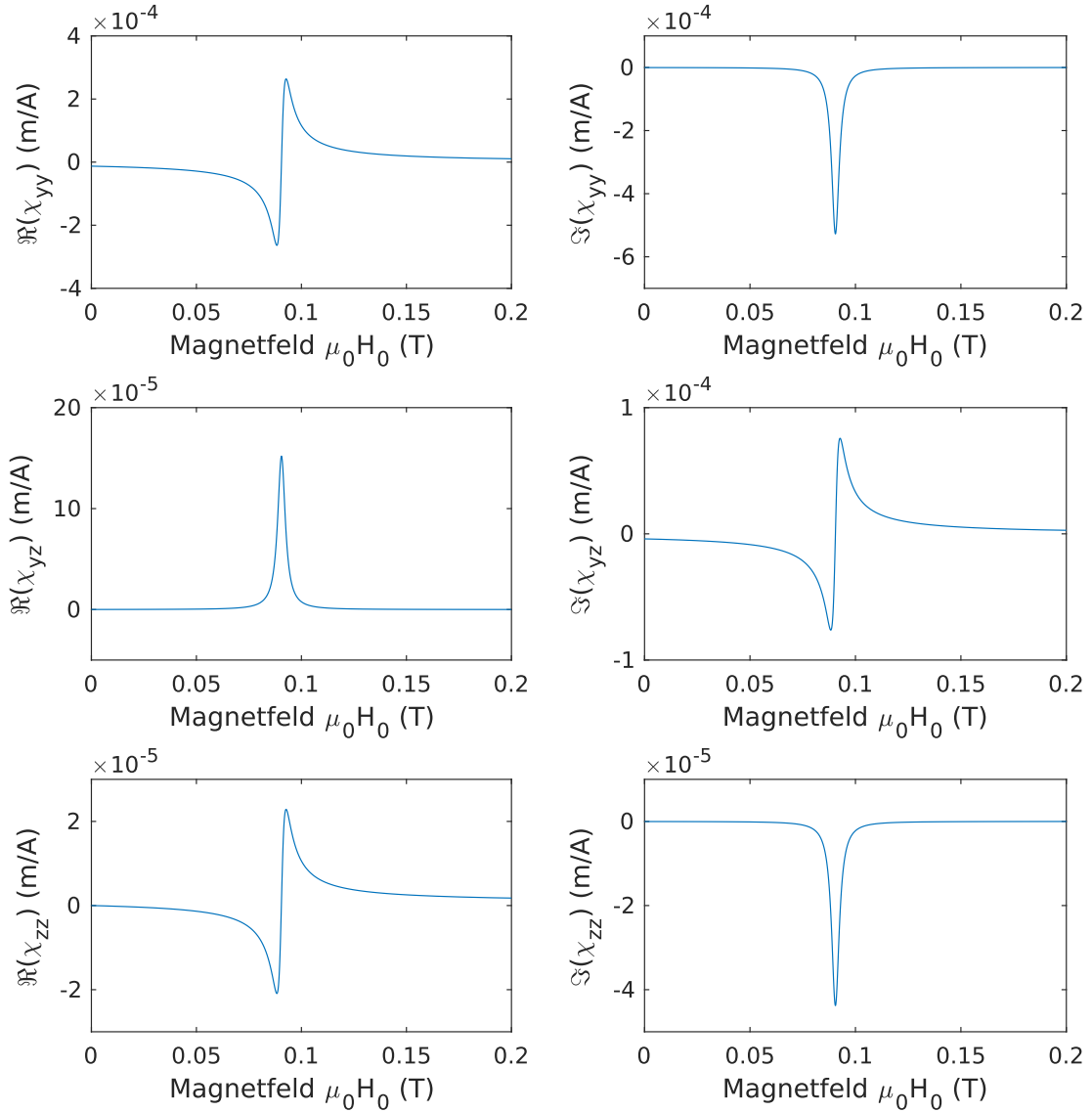


Abbildung 4: Linienform von Real- und Imaginärteil der Suszeptibilitäten. Für die Abbildung wird  $\omega = 2\pi \cdot 10 \text{ GHz}$ ,  $\gamma = 200 \frac{\text{GHz}}{\text{T}}$ ,  $\mu_0 M_S = 1 \text{ T}$  und  $\alpha = 0,007$  verwendet. Die Realteile von  $\chi_{yy}$  und  $\chi_{zz}$  haben die Form einer antisymmetrischen Lorentzkurve und die Imaginärteile sind symmetrische Lorentzkurven. Für  $\chi_{yz}$  gilt das Gegenteil.

Hier wurden das effektive Feld und die effektive Magnetisierung im Resonanzfall,  $\mathfrak{H}_{\text{FMR}} = \mathfrak{H}_{\text{eff}}|_{H_0=H_{\text{FMR}}}$  und  $\mathfrak{B}_{\text{FMR}} = \mathfrak{B}_{\text{eff}}|_{H_0=H_{\text{FMR}}}$ , eingeführt.  $\delta H$  ist die Differenz zwischen externem Feld und Resonanzfeld  $H_0 - H_{\text{FMR}}$ . Außerdem wurde die Linienbreite (halbe Breite bei halbem Maximum) als  $\mu_0 \Delta H = \frac{\alpha \omega}{\gamma}$  definiert.

Durch Berechnung der Ableitungen mittels Gleichungen (34) und (33) und Multiplikation mit dem komplex Konjugierten des Nenners ergibt sich die Linienform der Suszeptibilität  $\chi_{yy}$ .

$$\chi_{yy} = \frac{\mathfrak{B}_{\text{FMR}}}{(\mathfrak{B}_{\text{FMR}} + \mu_0 \mathfrak{H}_{\text{FMR}}) \Delta H} \left( \frac{\Delta H (H_0 - H_{\text{FMR}}) - i \Delta H^2}{(H_0 - H_{\text{FMR}})^2 + \Delta H^2} + \frac{\mu_0 \Delta H}{\mathfrak{B}_{\text{FMR}}} \right) \quad (43)$$

Man erkennt also, dass der Realteil der Suszeptibilität  $\chi_{yy}$  die Form einer antisymmetrischen Lorentzkurve hat, während der Imaginärteil die Form einer symmetrischen Lorentzkurve aufweist. Die Linienform aller Suszeptibilitäten ist exemplarisch in Abbildung 4 dargestellt.

Es kann gezeigt werden, dass die von der Probe absorbierte Mikrowellenleistung von den Imaginärteilen von  $\chi_{yy}$  und  $\chi_{zz}$  bestimmt wird. Daher besitzen FMR-Resonanzkurven die Form von symmetrischen Lorentzkurven. Für die mittlere absorbierte Leistung gilt [11, 14]:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu_0 M_S \omega \left( \Im(\chi_{yy}) h_y^2 + \Im(\chi_{zz}) h_z^2 \right) \quad (44)$$

## 2.5 Ferromagnetische Resonanz - Dämpfung

Die Abhängigkeit der Linienbreite von der Mikrowellenfrequenz  $\omega$  bei Messungen der ferromagnetischen Resonanz wird durch folgende empirische Gleichung beschrieben [11, 12]:

$$\Delta H = \Delta H(0) + \frac{\alpha \omega}{\gamma} \quad (45)$$

Der Teil  $\frac{\alpha \omega}{\gamma}$  der Dämpfung wird dabei durch intrinsische Mechanismen erzeugt und kann durch den Gilbert-Dämpfungsparameter  $\alpha$  bereits in der LLG berücksichtigt werden. Sie wird hauptsächlich durch Wirbelströme, direkte Magnon-Phonon-Streuung oder Relaxation über itinerante Elektronen verursacht [11, 12]. Der Offset  $\Delta H(0)$  kommt durch extrinsische Mechanismen zustande und wird durch Defekte oder Inhomogenitäten in der Probe verursacht [12].

## 3 Experimentelle Grundlagen und Auswertung

### 3.1 Genereller Aufbau eines FMR-Spektrometers

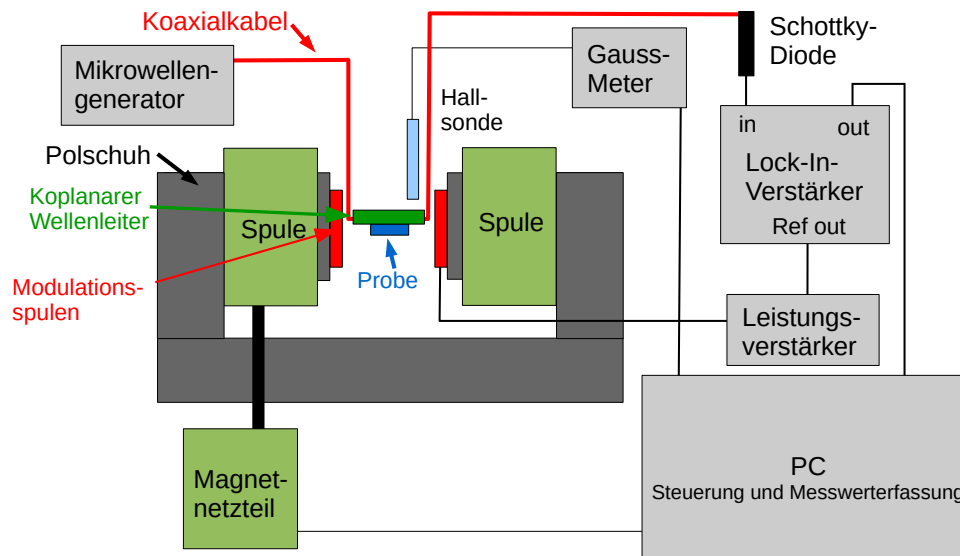


Abbildung 5: Aufbau des in Praktikumsversuch verwendeten FMR-Spektrometers. Ein Frequenzgenerator erzeugt Mikrowellen, die über Koaxialkabel durch den Wellenleiter und schließlich zur Schottky-Diode geführt werden. Auf dem Wellenleiter befindet sich die Probe im Feld eines Elektromagneten und einer kleinen Modulationsspule. Die Intensität der Mikrowellen wird mit einer Schottky-Diode detektiert und durch einen Lock-In-Verstärker gemessen. Abb. nach [6].

In diesem Praktikumsversuch steht ein einfaches FMR-Spektrometer zur Verfügung, mit dem die Grundprinzipien der ferromagnetischen Resonanz verstanden werden können. Die folgende Beschreibung eines FMR-Spektrometers folgt in wesentlichen Teilen [6].

Bei Messungen der FMR werden die magnetischen Momente in der Probe durch ein eingestrahktes Hochfrequenzmagnetfeld  $\vec{h}$  im Mikrowellenbereich zur Präzession um das effektive magnetische Feld angeregt [11, 12]. Die Probe befindet sich dabei im konstanten Magnetfeld  $\vec{H}_0$  eines Elektromagneten. Bei einer bestimmten Frequenz und Magnetfeldstärke  $\vec{H}_{\text{FMR}}$  tritt Resonanz auf und die Absorption der Mikrowellen wird maximal [11, 12, 14]. Um die Resonanz der Probe zu messen wird beim Versuch das Magnetfeld bei konstanter Mikrowellenfrequenz variiert und gleichzeitig die Absorption der Mikrowellen in der Probe mit Hilfe einer Schottky-Diode gemessen.

Die Probe befindet sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten auf

einem Wellenleiter, sodass die Probe ungefähr mittig und eben auf dem Wellenleiter liegt. Zur Veranschaulichung des Aufbaus kann das in Abbildung 5 dargestellte Blockdiagramm verwendet werden. Das Netzteil des Magneten erzeugt einen Spulenstrom von bis zu 20 A, der ein Magnetfeld von ungefähr 490 mT zwischen den Polschuhen des Magneten bewirkt. Zur Messung der Feldstärke ist eine Hallsonde möglichst mittig zwischen den Polschuhen angebracht. Die Hallsonde wurde bereits im Vorfeld des Versuchs mit Hilfe einer DPHH (2,2-Diphenyl-1-picrylhydrazyl)-Probe kalibriert. Bei diesem komplexen organischen Molekül tritt genau ein ungepaartes Elektron auf, sodass sein g-Faktor ungefähr dem eines freien Elektrons entspricht. Durch den bekannten g-Faktor kann bei einer festen Mikrowellenfrequenz die Resonanzfeldstärke berechnet und die experimentell gemessenen Feldstärke mit der berechneten abgeglichen werden. Ein Gaussmeter misst die Werte für die Feldstärke und überträgt sie an das Messprogramm auf dem PC. Während der Messung wird durch das Messprogramm das Magnetfeld linear mit der Zeit erhöht.

**Vorbereitungsaufgabe 10:** Informieren Sie sich darüber, wie Magnetfeldmessung mit einem Hallsensor funktioniert. Warum ist eine Kalibrierung nötig um das exakte Magnetfeld an der Probenposition zu bestimmen?

Zur Anregung der Präzession der Magnetisierung wird ein Mikrowellenfeld benötigt. Beim verwendeten FMR-Aufbau werden die Mikrowellen von einem Mikrowellengenerator erzeugt, mit dem sich sowohl die Leistung als auch die Frequenz über einen weiten Bereich verändern lassen. Es können Frequenzen von 2 bis 26 GHz und Mikrowellenleistungen bis zu 13 dBm erzeugt werden. Die Mikrowellen werden über Koaxialkabel vom Mikrowellengenerator zum koplanaren Wellenleiter transportiert. Die Probe wird auf den Wellenleiter gelegt und befindet sich daher in dessen Magnetfeld. Die Probe absorbiert einen Teil der eingestrahlten Leistung. Die Intensität der übrigen Mikrowellenstrahlung wird mit Hilfe einer Schottky-Diode gemessen.

Da sich die transmittierte Leistung durch die Mikrowellenabsorption in der Probe nur geringfügig ändert, wird die Änderung der Diodenspannung mit einem Lock-In-Verstärker gemessen. Bei Messungen mit einem Lock-In-Verstärker muss das Messsignal mit einem Referenzsignal moduliert werden. Dazu wird mit einem Frequenzgenerator, der im hier betrachteten Aufbau bereits im Lock-In-Verstärker integriert ist, ein sinusförmiges Referenzsignal mit der Frequenz 620 Hz erzeugt. Es ist darauf zu achten, dass eine Frequenz gewählt wird, die kein Vielfaches der Netzfrequenz von 50 Hz ist. Das Referenzsignal wird von einem Leistungsverstärker verstärkt und an den Modulationsspulen angelegt. Dadurch ergibt sich eine kleine Modulation des externen Magnetfelds  $\vec{H}_0$ . Der Lock-In-Verstärker filtert nun aus dem Messsignal den Anteil mit derselben Frequenz und einer definierten Phasenbeziehung bezüglich des Referenzsignals heraus, wodurch das Signal-Rausch-Verhältnis erheblich verbessert wird.

**Vorbereitungsaufgabe 11:** Informieren Sie sich über die Funktionsweise und den internen Aufbau eines Lock-In-Verstärkers. Fertigen Sie ein Blockschaubild eines Lock-In-Verstärkers an. Informieren Sie sich auch über die verschiedenen Arten von Rauschen und über deren Frequenzspektrum. Sie können dafür zum Beispiel folgenden Anwendungshinweis von Stanford Research Systems benutzen <http://www.thinksrs.com/downloads/PDFs/ApplicationNotes/AboutLIAs.pdf>

### 3.2 Mikrowellentechnik

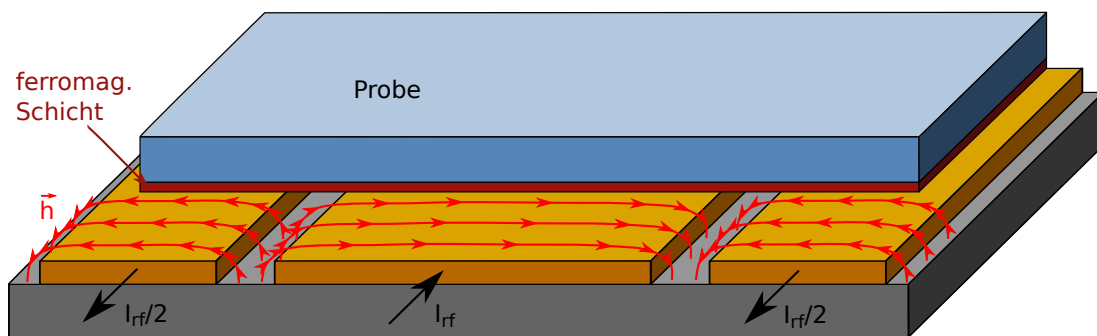


Abbildung 6: Prinzip eines koplanaren Wellenleiters. Der koplanare Wellenleiter besteht aus drei parallelen Leiterbahnen, die von einem hochfrequenten Strom durchflossen werden. Dadurch ergibt sich um die Leiterbahnen herum das Mikrowellenanregungsfeld  $\vec{h}$ , das durch die roten Feldlinien skizziert ist. Die Probe wird mit der ferromagnetischen Schicht nach unten auf den Wellenleiter gelegt, sodass dessen magnetische Momente durch  $\vec{h}$  zur Präzession angeregt werden können.

Hier sollen die im Versuch verwendeten Mikrowellenbauelemente kurz erklärt werden. Bei den hier durchgeführten FMR-Experimenten wird die Probe auf einen koplanaren Wellenleiter gelegt. Bei einem koplanaren Wellenleiter handelt es sich um ein Bauelement, das aus drei parallelen metallischen Leiterbahnen besteht [12]. In Abbildung 6 ist ein solcher Wellenleiter schematisch dargestellt. Die mittlere der Leiterbahnen ist die Signalleitung (eng.: signal line), auf der die Mikrowellenleistung transportiert wird [12]. Die beiden äußeren Leiterbahnen sind Masseleitungen (eng.: ground lines) [12]. Die Magnetfeldrichtung in der Umgebung eines koplanaren Wellenleiters lässt sich einfach mit der Rechten-Hand-Regel bestimmen. Dadurch ergeben sich die in Abbildung 6 dargestellten Feldrichtungen. Da die Probe den kompletten Wellenleiter überdeckt, wird das Mikrowellenmagnetfeld unter verschiedenen Richtungen bezüglich der Probe stehen. Dabei zeigt das Anregungsfeld zwischen den Leiterbahnen senkrecht und auf den Leiterbahnen parallel zur Probenebene. Da für ein Mikrowellenfeld parallel zur

Gleichgewichtslage der Magnetisierung also in x-Richtung im Koordinatensystem xyz keine Präzession der Magnetisierung angeregt wird (die dynamischen Magnetisierungskomponenten  $\mathbf{m}_y$  und  $\mathbf{m}_z$  sind unabhängig von  $h_x$ ), sollte die Richtung der Signalleitung des Wellenleiters parallel zum externen Feld sein, damit dessen Wechselfeld senkrecht zur Feldrichtung und Gleichgewichtsmagnetisierung zeigt.

Die Intensität der Mikrowellen wird mit einer Schottkydiode gemessen. Dabei handelt es sich um eine spezielle Form der Halbleiterdiode, die mit einem Metall-Halbleiter-Kontakt arbeitet.

**Vorbereitungsaufgabe 12:** Informieren Sie sich über die phänomenologische Funktionsweise einer Diode. Wie sieht die über einer Diode abfallende Spannung aus, wenn sie in Serie mit einem Widerstand an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen wird? Informieren Sie sich über die besonderen Eigenschaften einer Schottkydiode im Vergleich zu anderen Halbleiterdioden. Die physikalische Funktionsweise einer Diode (Bänderdiagramme) braucht nicht verstanden zu werden.

### 3.3 Auswertung der Resonanzspektren

Zur Aufnahme eines FMR-Spektrums wird bei konstanter Mikrowellenfrequenz  $\omega$  das externe DC-Magnetfeld  $\vec{H}_0$  langsam erhöht und parallel dazu die Absorption der Mikrowellen über die Spannung der Schottky-Diode gemessen. Die Absorption von Mikrowellen während der ferromagnetische Resonanz der Probe wird durch den Imaginärteil der Suszeptibilität  $\chi_{yy}$  beschrieben, der die Form einer symmetrischen Lorentzkurve besitzt [11, 12, 14]. Die gesamte Absorption ist aber proportional zu einer asymmetrischen Lorentzkurve, da neben der symmetrischen Linienform der Absorption eine dispersive Komponente auftritt, die wie der Realteil von  $\chi_{yy}$  eine antisymmetrische Linienform hat.

Die Messung der FMR-Spektren wird mit Hilfe eines Lock-In-Verstärkers durchgeführt. Dieser misst nicht die Absorption selbst, sondern die Änderung der Absorption mit dem externen DC-Magnetfeld  $H_0$ . Daher entsprechen die gemessenen Kurven der Ableitung der Absorption nach dem Feld  $H_0$ . Unter Einführung der FMR-Amplitude  $A$  kann nun die Fitfunktion  $f(H_0)$  für die FMR-Spektren definiert werden.

$$\begin{aligned}
 f(H_0) &\propto \frac{d}{dH_0} \left( \Im(\chi_{yy}) \cos \epsilon + \Re(\chi_{yy}) \sin \epsilon \right) \\
 &= A \left( - \frac{2\Delta H^3 (H_0 - H_{\text{FMR}}) \cos \epsilon}{((H_0 - H_{\text{FMR}})^2 + \Delta H^2)^2} + \frac{\Delta H^2 (\Delta H^2 - (H_0 - H_{\text{FMR}})^2) \sin \epsilon}{((H_0 - H_{\text{FMR}})^2 + \Delta H^2)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{46}$$

Zusätzlich zur letzten Gleichung muss beim Fit der Kurven noch ein Offset und eine Steigung berücksichtigt werden [14]. In der folgenden Abbildung 7 ist

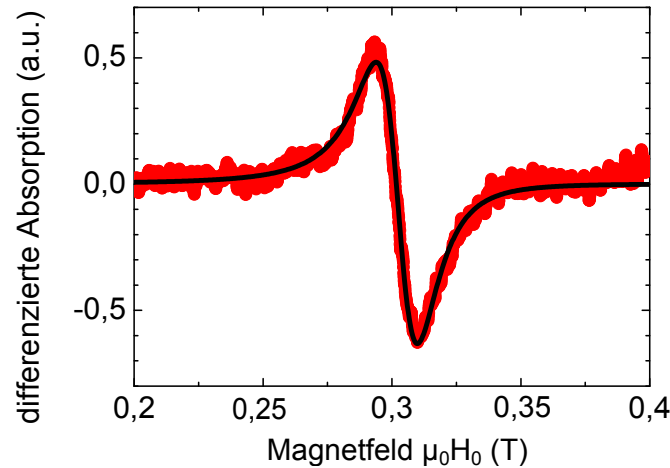


Abbildung 7: Die Abbildung zeigt ein typisches FMR-Spektrum. Die rot eingezeichneten Punkte stellen die aufgenommenen Messwerte dar, die schwarze Linie zeigt den Fit nach Gleichung (46). Mit Hilfe des Fits kann die Resonanzfeldstärke  $\mu_0 H_{\text{FMR}} = 303,2 \text{ mT}$  und die Linienbreite  $\mu_0 \Delta H = 13,8 \text{ mT}$  ermittelt werden. Abb. nach [6].

ein typisches FMR-Spektrum, das mit Gleichung (46) gefittet wurde, dargestellt. Die beiden wichtigsten Größen, die aus der Fitkurve ermittelt werden können, sind die Resonanzfeldstärke  $H_{\text{FMR}}$  und die Linienbreite  $\Delta H$  [11, 12]. Für die Durchführung des Versuchs wird ein Fitprogramm zur Verfügung gestellt, um das Resonanzfeld  $H_{\text{FMR}}$  und die Linienbreite  $\Delta H$  zu bestimmen.

Für nahezu antisymmetrische FMR-Spektren können Resonanzfeldstärke und Linienbreite näherungsweise auch direkt aus den gemessenen Spektren abgelesen werden (siehe Abb. 7). Die Nullstelle des Spektrums gibt dabei die Resonanzfeldstärke  $H_{\text{FMR}}$  an. Die Linienbreite ist proportional zum Abstand  $\Delta H^{pp}$  zwischen den beiden Extrema, sodass  $\Delta H = \sqrt{3}/2 \Delta H^{pp}$  [11, 12, 14].

## 4 Vorhandene Proben

- Ein gesputterter Permalloy-Film (eine Legierung mit der Zusammensetzung  $\text{Ni}_{81}\text{Fe}_{19}$ ) mit einer Schichtdicke von 50 nm, der mit einer Goldschicht gegen Oxidation geschützt ist.
- Eine Durch Sputter-Deposition auf Gadolinium-Gallium-Granat gewachsene Yttrium-Eisen-Granat (YIG) Schicht von etwa 20 nm Dicke.

## 5 Versuchsdurchführung

### 5.1 Einfluss der Messparameter

- Legen Sie den Probenhalter für die in-plane Konfiguration, auf dem bereits die Permalloy-Probe aufgeklebt ist, in den Aufbau ein.
- Stellen Sie am Mikrowellengenerator eine Frequenz von 10 GHz und eine Leistung von 0 dBm ein. Nehmen Sie ein Spektrum mit einer Modulationsstromstärke von 5 mA, einer Zeitkonstanten von 0,1 s und einer Sweep-Geschwindigkeit von  $1 \frac{\text{mT}}{\text{s}}$  auf. Benutzen Sie dieses korrekt aufgenommene Spektrum im Folgenden als Referenz.
- Variieren Sie die Modulationsstromstärke ausgehend von dem im vorigen Punkt genannten Wert nach oben und unten und beobachten Sie den Einfluss auf das Spektrum. Bestimmen Sie für jedes Spektrum die Linienbreite. Nehmen Sie mindestens fünf Kurven auf mit Stromstärken von 0,5 mA bis 200 mA. Ändern Sie dabei die Empfindlichkeit des Lock-In-Verstärkers, falls das Signal zu klein ist oder abgeschnitten wird.
- Stellen Sie wieder die anfangs genannten Werte ein. Variieren Sie dann die Zeitkonstante am Lock-In-Verstärker ausgehend von dem anfangs genannten Wert nach oben und unten und beobachten Sie den Einfluss auf das Spektrum. Bestimmen Sie für jedes Spektrum die Linienbreite. Nehmen Sie mindestens vier Kurven auf mit Zeitkonstanten von 1 ms bis 10 s.
- Stellen Sie die anfangs genannten Werte ein. Variieren Sie im Folgenden die Sweep-Geschwindigkeit ausgehend von dem im vorigen Punkt genannten Wert nach oben und unten und beobachten Sie den Einfluss auf das Spektrum. Bestimmen Sie für jedes Spektrum die Linienbreite. Nehmen Sie mindestens fünf Kurven auf mit Geschwindigkeiten von  $0,1 \frac{\text{mT}}{\text{s}}$  bis  $50 \frac{\text{mT}}{\text{s}}$ .

### 5.2 Frequenzabhängigkeit in der in-plane Konfiguration an Permalloy

- Stellen Sie wieder sinnvolle Parameter für Modulationsfeld, Sweep-Geschwindigkeit und Zeitkonstante ein. Verändern Sie nun die Mikrowellenfrequenz im Bereich von 2 bis 20 GHz und verfolgen Sie die Resonanzlinie von Permalloy. Sie können dazu das Magnetfeld auf den Bereich einschränken, in dem die Resonanz zu erwarten ist, um Zeit zu sparen.
- Werten Sie die gemessenen Resonanzlinien mit Hilfe des Fitprogramms bezüglich Resonanzfeldstärke und Linienbreite aus.
- Interpretieren Sie die Resonanzfelder mit Hilfe der Kittel-Formel in Gleichung (36). Bestimmen Sie damit  $\mu_0 M_{\text{eff}}$ . Hinterfragen Sie ihre Fit-Ergebnisse.



nisse kritisch und versuchen Sie Gründe für Abweichungen von den erwarteten Werten zu finden. Beachten Sie, dass der  $g$ -Faktor der Elektronen in Permalloy ungefähr 2.14 ist (entspricht  $\gamma = 188 \frac{\text{GHz}}{\text{T}}$ ) [11].

- Interpretieren Sie die Linienbreiten mit Hilfe von Gleichung (45). Bestimmen Sie den Achsenabschnitt der Linienbreite und den Gilbert-Dämpfungsparameter  $\alpha$ .

## 5.3 Untersuchung einer Yttrium-Eisen-Granat Probe

### 5.3.1 In-plane Konfiguration

- Legen Sie nun die YIG-Probe anstatt der Permalloy-Probe auf den in-plane Probenhalter.
- Versuchen Sie bei einer Mikrowellenfrequenz von 2 GHz ein erstes Spektrum aufzunehmen. Benutzen Sie einen Magnetfeldbereich von 15 bis 35 mT. Verwenden Sie aufgrund der zu erwartenden niedrigen Linienbreiten eine geringe Sweep-Geschwindigkeit von  $0.3 \frac{\text{mT}}{\text{s}}$ , und reduzieren Sie den Modulationsstrom auf 3 mA und die Zeitkonstante auf 30 ms.
- Überlegen Sie sich ausgehend von diesem Spektrum sinnvolle Messparameter für die folgenden Spektren. Halten Sie Rücksprache mit dem Betreuer, falls Sie sich in Ihrer Wahl nicht sicher sind.
- Variieren Sie im Folgenden die Mikrowellenfrequenz von 2 bis 11 GHz und bestimmen Sie für jedes Spektrum Resonanzfeld und Linienbreite. Nehmen Sie zehn Spektren auf. Bestimmen Sie bei jedem Spektrum die Resonanzposition durch Ablesen und ungefähre Mittelung über alle vorhandenen Peaks.
- Interpretieren Sie die Ergebnisse, indem Sie das Resonanzfeld mit Hilfe von Gleichung (36) und die Linienbreite mit Gleichung (45). Bestimmen Sie die effektive Magnetisierung  $\mu_0 M_{\text{eff}}$  der YIG-Probe. Benutzen Sie den Literaturwert  $g \approx 2.01$  für YIG ( $\gamma \approx 177 \frac{\text{GHz}}{\text{T}}$ ) [15].

### 5.3.2 Senkrechte Konfiguration

- Hier soll dieselbe Probe noch einmal in der senkrechten Konfiguration vermessen werden. Legen Sie dazu den mit einer baugleichen Probe bestückten Probenhalter für die senkrechte Konfiguration in den Aufbau ein.
- Versuchen Sie als Erstes bei einer Frequenz von 2 GHz ein Spektrum aufzunehmen. Benutzen Sie dieselben Parameter wie bei der in-plane Konfiguration.
- Variieren Sie die Mikrowellenfrequenz von 2 GHz bis 8 GHz und bestimmen Sie das Resonanzfeld ungefähr wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Nehmen Sie zehn Spektren auf.

- Interpretieren Sie die Ergebnisse für das Resonanzfeld mit Hilfe von Gleichung (37) und bestimmen Sie die effektive Magnetisierung  $\mu_0 M_{\text{eff}}$  und das gyromagnetische Verhältnis  $\gamma$ . Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Messungen in der in-plane Konfiguration.

## 6 Anforderungen an das Protokoll

Das Protokoll sollte folgende Aspekte enthalten:

- Magnetische Energien im Ferromagneten
- Theorie der ferromagnetischen Resonanz. Gehen Sie von der LLG aus und behandeln Sie die wesentlichen Aspekte der Theorie. Lassen Sie aufwendige Herleitungen (z.B. Koordinatentransformationen beim effektiven Feld, Herleitung der Linienform) weg. Leiten Sie die Resonanzbedingungen her.
- Beschreibung des FMR-Versuchs und der im Versuch verwendeten Geräte.
- Beschreibung der durchgeführten Messungen
  - Einfluss der Messparameter. Diskutieren Sie den Einfluss der verschiedenen Messparameter auf die Linienbreite der Resonanz. Versuchen Sie Kriterien aufzustellen um die optimalen Messparameter zu finden.
  - Frequenzabhängigkeit an einer Permalloy-Probe. Werten Sie die aufgenommenen Spektren bezüglich Linienbreite und Resonanzfeldstärke aus und bestimmen Sie die Materialparameter von Permalloy.
  - Messungen an der YIG-Probe. Werten Sie die Spektren bezüglich Resonanzfeldstärke durch manuelle Mittelung über alle Peaks aus und bestimmen Sie die effektive Magnetisierung. Vergleichen Sie die Messungen in der in-plane und in der senkrechten Konfiguration.

## 7 Weiterführende Literatur

- M. Härtinger, Untersuchung magnetischer Materialien mit Methoden der Ferromagnetischen Resonanz, Dissertation, Universität Regensburg, 2016, verfügbar online unter <https://epub.uni-regensburg.de/35434/1/Thesis.pdf>
- G. Woltersdorf, Spin-Pumping and Two-Magnon Scattering in Magnetic Multilayers, Dissertation, Simon Fraser University, 2004, verfügbar online unter <https://epub.uni-regensburg.de/14960/1/Woltersdorf-PhD04.pdf>
- S. Blundell, Magnetism in Condensed Matter
- J. M. D. Coey, Magnetism and magnetic materials
- C. P. Slichter, Principles of Magnetic Resonance

## Literatur

- [1] J.H.E. Griffiths. Anomalous High-frequency Resistance of Ferromagnetic Metals. *Nature*, 158:670–671, November 1946.
- [2] E. Zavoisky. Spin Magnetic Resonance in The Decimetre-Wave Region. *J. Phys. USSR*, 10:197, November 1946.
- [3] C. Kittel. On the Theory of Ferromagnetic Resonance Absorption. *Phys. Rev.*, 73:155–161, Jan 1948.
- [4] L.D. Landau und E. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 8:153–169, 1935.
- [5] T.L. Gilbert. A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetization field. *Phys. Rev.*, 100:1243–1244, 1955.
- [6] T.N.G. Meier. Temperaturabhängige Messungen des inversen Spin-Hall-Effekts. Bachelorarbeit, Universität Regensburg, Fakultät Physik, Oktober 2012.
- [7] T.N.G. Meier. Thermodynamical properties of fluctuating magnetic stripe domains in ultrathin Fe/Ni/Cu(001) and Ni/Fe/Cu(001) films. Masterarbeit, Universität Regensburg, Fakultät Physik, Dezember 2014.
- [8] J.M.D. Coey. *Magnetism and Magnetic Materials*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] S. Blundell. *Magnetism in Condensed Matter*. Oxford University Press, 2001.
- [10] M.O. Härtinger. *Untersuchung magnetischer Materialien mit Methoden der Ferromagnetischen Resonanz*. Dissertation, Universität Regensburg, Fakultät für Physik, März 2016.

- [11] G. Woltersdorf. *Spin-Pumping and Two-Magnon-Scattering in Magnetic Multilayers*. Dissertation, Simon Fraser University, Department of Physics, August 2004.
- [12] M.O. Härtinger. Magnetische Eigenschaften neuer ferromagnetischer Materialien. Masterarbeit, Universität Regensburg, Fakultät Physik, August 2011.
- [13] J. A. Osborn. Demagnetizing Factors of the General Ellipsoid. *Phys. Rev.*, 67:351–357, Jun 1945.
- [14] Z. Celinski, K.B. Urquhart, und B. Heinrich. Using ferromagnetic resonance to measure the magnetic moments of ultrathin films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 166(1):6 – 26, 1997.
- [15] Seongjae Lee, Scott Grudichak, Joseph Sklenar, C. C. Tsai, Moongyu Jang, Qinghui Yang, Huaiwu Zhang, und John B. Ketterson. Ferromagnetic resonance of a YIG film in the low frequency regime. *Journal of Applied Physics*, 120(3):033905, 2016.