# Pendel (PEN)

Themengebiet: Mechanik

Der Versuch „Pendel“ besteht aus zwei Teilversuchen. Im ersten Teil wird mit einem *Reversionspendel* die Erdbeschleunigung im Praktikumsraum bestimmt. Im zweiten Teil werden dann *gekoppelte Schwingungen* zweier Pendel untersucht.

## 1 Grundlagen

### 1.1 Mathematisches Pendel

An einem nahezu masselosen Faden der Länge $l$ hängt ein nahezu punktförmiger Körper der Masse $m$. Die Annahmen *masselos* und *punktförmig* stellen Näherungen dar, die das *mathematische Pendel* charakterisieren.

In Abbildung 1 ist ein mathematisches Pendel skizziert. Bei einer Auslenkung aus der Ruhelage führt das Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen aus. Die Komponente der Schwerkraft $G$, die die Masse in Richtung der Bahntangente $s$ beschleunigt, beträgt

$$F = -m \cdot g \cdot \sin\varphi, \tag{1}$$

wobei $g$ die Erdbeschleunigung und $\varphi$ der Auslenkwinkel sind.

Betrachtet man nun die Beschleunigung entlang der Kreisbahn $\ddot{s} = l \cdot \ddot{\varphi}$ so ergibt sich als Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot \ddot{s} - F = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin\varphi \\ 0 &= \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi \end{aligned} \tag{2}$$

Für hinreichend kleine Auslenkungen kann man die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ verwenden und erhält die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0, \tag{3}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t), \tag{4}$$

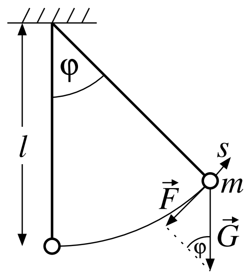


*Abbildung 1: Mathematisches Pendel: Eine Punktmasse m an einem masselosen Faden der Länge l. Der Auslenkung s auf dem Kreisbogen wirkt der Anteil $\vec{F}$ der Gewichtskraft $\vec{G}$ entgegen.*

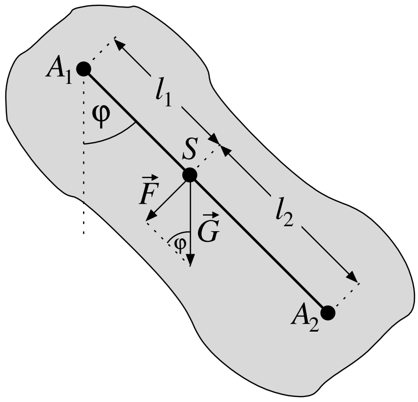


*Abbildung 2: Physikalisches Pendel mit den Aufhängepunkten $A_i$ im Abstand $l_i$ vom Schwerpunkt S. Der Anteil $\vec{F}$ der Gewichtskraft $\vec{G}$ greift im Schwerpunkt an und wirkt der Auslenkung entgegen.*

mit den Amplituden $\varphi_0$, beziehungsweise $A$ und $B$, der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ und einer Phasenverschiebung $\phi$ (bei geeigneter Wahl des Zeitnullpunkts wird $\phi = 0$, gleichbedeutend mit $B = 0$). Für die Schwingungsdauer $\tau$ des Pendels erhält man

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

## 1.2 Physikalisches Pendel

Entfernt man sich von der Idealisierung des mathematischen Pendels und betrachtet einen beliebigen starren Körper, der sich um eine feste, horizontale Achse $A_1$ drehen kann, die im Abstand $l_1$ zum Schwerpunkt $S$ verläuft, so erhält man ein *physikalisches Pendel*. Ein solches ist in Abbildung 2 skizziert. Anstatt der Kräfte werden nun die bei der Drehbewegung auftretenden Momente betrachtet.

Das beschleunigende Drehmoment $M$, das durch die im Schwerpunkt angreifende Schwerkraft $G$ erzeugt wird, ist analog zu (1)

$$M = l_1 \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi. \tag{6}$$

Dieses Drehmoment führt zu einer Änderung des Drehimpulses $L = J_1 \cdot \dot{\varphi}$, mit dem Trägheitsmoment $J_1$ bezüglich der Drehachse $A_1$. Daraus ergibt sich dann die Bewegungsgleichung

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l_1 \cdot \sin\varphi = 0. \tag{7}$$

Mit der Kleinwinkelnäherung für kleine Auslenkungen ergibt sich analog zu (3) die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{m \cdot g \cdot l_1}{J_1} \cdot \varphi = 0. \tag{8}$$

Die Lösung ist wieder eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_1}{m \cdot g \cdot l_1}}. \tag{9}$$

Drückt man noch das Trägheitsmoment $J_1$ bezüglich der Achse $A_1$ mit Hilfe des Satz' von Steiner durch das Trägheitsmoment $J_\mathrm{S}$ bezüglich des Schwerpunktes aus, so ergibt sich

$$\tau = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_\mathrm{S} + m \cdot l_1^2}{m \cdot g \cdot l_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1} + l_1\right)}. \tag{10}$$

### 1.3 Reversionspendel

Betrachtet man Gleichung (10) für eine feste Schwingungsdauer $\tau$, so ergibt sich eine quadratische Gleichung bezüglich $l_1$. Es muss also eine zweite, im allgemeinen von $l_1$ verschiedene Lösung $l_2$ geben, die Gleichung (10) erfüllt.

$$\frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1} + l_1 = \frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_2} + l_2 \tag{11}$$

Außer durch die triviale Lösung $l_1 = l_2$ erhält man noch die Lösung

$$l_2 = \frac{J_\mathrm{S}}{m \cdot l_1}. \tag{12}$$

Dies bedeutet, dass der Körper bezüglich eine zur Achse $A_1$ parallelen Achse $A_2$, die vom Schwerpunkt den Abstand $l_2$ besitzt, die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie für Schwingungen um $A_1$. In Abbildung 2 ist die Achse $A_2$ eingezeichnet, die in der Verlängerung von $A_1S$ über S hinaus liegt, so dass der Abstand der beiden Achsen $\overline{A_1A_2} = l_1 + l_2$ ist. In einem solchen Fall, wenn der Schwerpunkt und die beiden Rotationsachsen auf einer Geraden liegen, spricht man von einem *Reversionspendel.*

Vergleicht man die Gleichungen (5) und (10) so stellt man fest, dass ein mathematisches Pendel dann die selbe Schwingungsdauer wie ein physikalisches Pendel hat, wenn die Fadenlänge

$$l_\mathrm{r} = \frac{J_\mathrm{S} + m \cdot l_1^2}{m \cdot l_1} \tag{13}$$

ist. $l_\mathrm{r}$ heißt *reduzierte Pendellänge*. Mit (12) und (13) erhält man

$$l_\mathrm{r} = l_1 + l_2, \tag{14}$$

und es ergibt sich für die Schwingungsdauer der Zusammenhang

$$\tau^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l_\mathrm{r}}{g} = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{g}. \tag{15}$$

Es ist ersichtlich, dass in diesem Fall die Schwingungsdauer unabhängig von der Masse und dem Trägheitsmoment des Pendels ist, und nur von der reduzierten Länge und der Erdbeschleunigung abhängt.

### 1.4 Gekoppelte Pendel

Im Folgenden werden zwei Stabpendel betrachtet, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Durch die Feder üben die Pendel in Abhängigkeit von ihren jeweiligen Auslenkung Drehmomente aufeinander aus, Sie sind also gekoppelt. Als Vereinfachung wird zudem angenommen, dass es sich um gleich aufgebaute Pendel (also gleiches Trägheitsmoment $J$, und gleiche Schwingungsdauer $\tau$) handelt. Schematisch ist dies in Abbildung 3 dargestellt. Die Winkel $\varphi_n$ bezeichnen dabei die Auslenkung aus der ursprünglichen Ruhelage, $\psi_n$ sind die Auslenkungen aus der sich mit der Feder einstellenden Gleichgewichtslage mit den Winkeln $\varphi_{01}$ und $\varphi_{02}$. Mit der Annahme gleicher Pendel (symmetrischer Fall) ist $\varphi_{01} = -\varphi_{02} =: \varphi_0$ und damit

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_0 \qquad \text{und} \qquad \psi_2 = \varphi_2 + \varphi_0. \tag{16}$$

Für die folgenden Betrachtungen wird weiter davon ausgegangen, dass die Auslenkungen so klein sind, dass immer die Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ gilt.

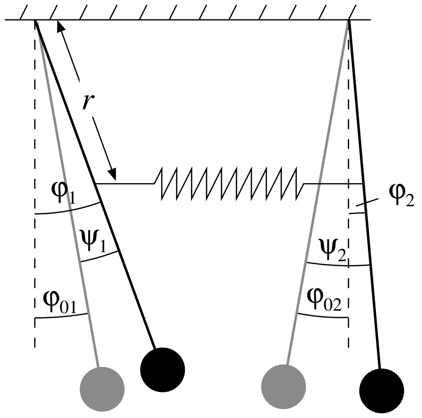


*Abbildung 3: Winkelbezeichnungen für die gekoppelten Pendel: Die neue Gleichgewichtslage ist in grau eingezeichnet, die Winkel $\varphi_n$ bezeichnen die Auslenkung aus der ursprünglichen Ruhelage, die Winkel $\psi_n$ aus der neuen Gleichgewichtslage.*

Das Drehmoment, das auf das Pendel 1 wirkt, ist dann

$$\begin{aligned} M_1 &= \underbrace{-D\cdot\varphi_1}_{\text{rücktreibendes Moment}} + \underbrace{\kappa\cdot(r\cdot\varphi_2 - r\cdot\varphi_1)\cdot r}_{\text{Drehmoment durch Feder}} + \underbrace{M_0}_{\text{durch Vorspannung der Feder}} \\ &= -D\cdot\varphi_1 + \kappa\cdot r^2\cdot(\varphi_2-\varphi_1) + M_0, \end{aligned} \tag{17}$$

und analog für das Pendel 2

$$M_2 = -D\cdot\varphi_2 - \kappa\cdot r^2\cdot(\varphi_2-\varphi_1) - M_0. \tag{18}$$

Dabei ist nach Gleichung (6) $D = m\cdot g\cdot l$, mit der Pendelmasse $m$ und $l$ dem Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängungspunkt, $\kappa$ ist die Federkonstante und $M_0$ das aus der Vorspannung der Feder entstehende Drehmoment. In der Gleichgewichtslage müssen die beiden Drehmomente verschwinden, man erhält dann

$$M_0 = \left(D + 2\,\kappa\, r^2\right)\cdot\varphi_0 \tag{19}$$

und kann die Gleichungen (17) und (18) auf die Winkel $\psi_n$ umschreiben

$$M_1 = -D\cdot\psi_1 + \kappa\cdot r^2\cdot(\psi_2-\psi_1) \tag{20}$$

$$M_2 = -D\cdot\psi_2 - \kappa\cdot r^2\cdot(\psi_2-\psi_1)\,. \tag{21}$$

Dies führt zu den gekoppelten Differentialgleichungen

$$J\cdot\ddot{\psi}_1 + D\cdot\psi_1 - \kappa\cdot r^2\cdot(\psi_2-\psi_1) = 0 \tag{22}$$

$$J\cdot\ddot{\psi}_2 + D\cdot\psi_2 + \kappa\cdot r^2\cdot(\psi_2-\psi_1) = 0. \tag{23}$$

Führt man die Abkürzungen $k^2 := \frac{\kappa\cdot r^2}{J}$ und $\omega_{\mathrm{gl}}^2 := \frac{D}{J}$ ein und substituiert

$$X := \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{und} \qquad Y := \psi_1 - \psi_2, \tag{24}$$

ergeben sich durch Addition beziehungsweise Subtraktion der beiden Gleichungen (22) und (22)

$$\ddot{X} + \omega_{\mathrm{gl}}^2\cdot X = 0 \tag{25}$$

$$\ddot{Y} + \underbrace{\left(\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2\,k^2\right)}_{\omega_{\mathrm{geg}}^2}\cdot Y = 0. \tag{26}$$

Als Lösung erhält man harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_{\mathrm{gl}}$ bzw. $\omega_{\mathrm{geg}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2k^2}$ und den Koeffizienten $A1, A2, A3, A4$, welche durch die Anfangsbedingungen (Anfangswinkel und Anfangswinkelgeschwindigkeit der beiden Pendel) bestimmt sind

$$X(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + A_2 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t), \tag{27}$$

$$Y(t) = A_3 \cdot \sin(\omega_{\mathrm{geg}}\, t) + A_4 \cdot \cos(\omega_{\mathrm{geg}}\, t). \tag{28}$$

Um die Bedeutung der Lösungen zu veranschaulichen, werden nun zwei Spezialfälle betrachtet.

1. Im ersten Fall soll nur $X(t)$ Schwingungen ausführen, es soll also $Y(t) = \psi_1 - \psi_2 \equiv 0$ sein. Dies ist gleichbedeutend damit, das die Pendel immer gleiche Auslenkung haben, also $\psi_1 = \psi_2$. Die Pendel schwingen also in Phase mit der Kreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{gl}} = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot l}{J}}. \tag{29}$$

   Ein Vergleich mit Gleichung (10) ergibt, dass dies gerade die Frequenz ist, mit der auch ein einzelnes Pendel ohne Kopplung schwingen würde.

2. Im zweiten Fall soll nur $Y(t)$ Schwingungen ausführen, es soll also $X(t) = \psi_1 + \psi_2 \equiv 0$ sein. Dies ist gleichbedeutend damit, das die Pendel immer genau entgegengesetzte Auslenkung $\psi_1 = -\psi_2$ haben. Die Pendel schwingen in diesem Fall mit der etwas größeren Kreisfrequenz

$$\omega_{\mathrm{geg}} = \sqrt{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + 2k^2} = \sqrt{\frac{D + 2\,\kappa \cdot r^2}{J}}. \tag{30}$$

Diese beiden Fälle sind die Fundamentalschwingungen des Systems. Im allgemeinen Fall liegt eine Überlagerung beider Schwingungsmoden vor. Durch Rücktransformation auf die Ausgangswinkel erhält man schließlich

$$\psi_1(t) = \frac{X+Y}{2} = \frac{A_1 \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + A_2 \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + A_3 \sin(\omega_{\mathrm{geg}}\, t) + A_4 \cos(\omega_{\mathrm{geg}}\, t)}{2} \tag{31}$$

$$\psi_2(t) = \frac{X-Y}{2} = \frac{A_1 \sin(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) + A_2 \cos(\omega_{\mathrm{gl}}\, t) - A_3 \sin(\omega_{\mathrm{geg}}\, t) - A_4 \cos(\omega_{\mathrm{geg}}\, t)}{2} \tag{32}$$

Für die Anfangsbedingung, dass zu Beginn nur ein Pendel ausgelenkt ist und beide Pendel in Ruhe sind (also $\psi_1 \neq 0$, $\psi_2 = 0$ und $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0$) ergibt sich $A := A_1 = A_3 \neq 0$ und $A_2 = A_4 = 0$.

Die Lösung der Schwingungsgleichung ist dann

$$\psi_1(t) = 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2} \cdot t\right) = 2A \cdot \sin(\omega_{\mathrm{M}} \cdot t) \cdot \cos(\omega_{\mathrm{S}} \cdot t) \tag{33}$$

$$\psi_2(t) = 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2} \cdot t\right) = 2A \cdot \cos(\omega_{\mathrm{M}} \cdot t) \cdot \sin(\omega_{\mathrm{S}} \cdot t). \tag{34}$$

Die Pendel schwingen also mit der mittleren Kreisfrequenz $\omega_{\mathrm{M}} = \frac{\omega_{\mathrm{gl}} + \omega_{\mathrm{geg}}}{2}$, wobei die Amplitude mit der Schwebungskreisfrequenz $\omega_{\mathrm{S}} = \frac{\omega_{\mathrm{geg}} - \omega_{\mathrm{gl}}}{2}$ moduliert ist.

Als Maß für die Stärke der Kopplung wird nun noch der Kopplungsgrad $K$ definiert als

$$K = \frac{\omega_{\mathrm{geg}}^2 - \omega_{\mathrm{gl}}^2}{\omega_{\mathrm{gl}}^2 + \omega_{\mathrm{geg}}^2} = \frac{\tau_{\mathrm{gl}}^2 - \tau_{\mathrm{geg}}^2}{\tau_{\mathrm{gl}}^2 + \tau_{\mathrm{geg}}^2} = \frac{\kappa \cdot r^2}{D + \kappa \cdot r^2}. \tag{35}$$

Für „weiche“ Federn (kleines $\kappa$) und kleine Abstände des Angriffspunktes der Feder von der Drehachse ist der Kopplungsgrad klein, für eine sehr „starre“ Feder ($\kappa \to \infty$) geht der Kopplungsgrad gegen $K = 1$.

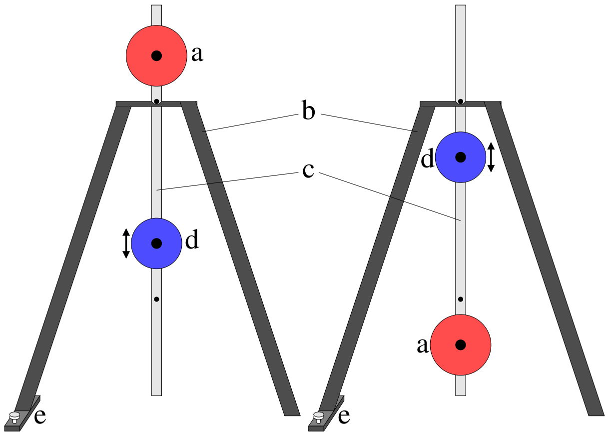


*Abbildung 4: Aufbau des Reversionspendels in beiden Positionen: a) feste Masse, b) Gestell mit Lager, c) Pendelstange, d) bewegliche Masse), e) Justierschraube*

# 2 Versuchsaufbau und -durchführung

## 2.1 Reversionspendel

Mit dem Reversionspendel wird in diesem Versuch die Erdbeschleunigung im Praktikumsraum bestimmt.

Nach Gleichung (15) wird eine Konfiguration gesucht, in der die Schwingungsdauer des Pendels um zwei unterschiedliche Schwingungsachsen gleich sind. Im Versuch verändert man dazu die Massenverteilung, indem man ein Gewicht entlang der Pendelstange verschiebt, und misst die dazugehörigen Schwingungsdauern um zwei feste Achsen.

Der Aufbau des Reversionspendels ist in Abbildung 4 skizziert. Es besteht aus einem Aluminiumgestell, an dem oben eine Lagerplatte befestigt ist. In die Vertiefung der Lagerplatte wird dann die an der Pendelstange befestigte Lagerachse eingehängt. Mit der Justierschraube wird das Gestell so ausgerichtet, dass die Lagerplatte waagrecht ist (Überprüfung mit der Wasserwaage an der Lagerplatte).

Das große (rote) Gewicht ist fest an der Pendelstange angebracht. Das kleinere (blaue) Gewicht lässt sich mit einer Rändelschraube lösen und entlang der Pendelachse verschieben. An der Pendelstange sind Vertiefungen in 2,5 cm Abstand angebracht, an denen das Gewicht wieder fixiert werden kann.

Zusätzlich steht eine Lichtschranke bereit, mit der Pendeldauern mit einer Genauigkeit von 1 ms gemessen werden können. Die Lichtschranke wird so platziert, dass sie in der Ruheposition des Pendels unterbrochen ist. An dieser Position sind die Messabweichungen am geringsten.

**Achtung:**
**Um eine Beschädigung des Lagers zu vermeiden darf die Position des Gewichtes nur verändert werden, wenn das Pendel nicht im Lager hängt.**
**Achten Sie beim Einhängen der Pendelstange in das Lager darauf, dass die Lagerachse nicht verbogen wird (vorsichtig und gerade einhängen)**.

**Aufgabe 1: Ausrichten der Apparatur**

Richten Sie mit den Justierschrauben am Fuß das Gestell so aus, dass das Lager waagrecht ist.

**Aufgabe 2: Messungen**

Messen Sie für alle Stellungen des beweglichen (blauen) Gewichtes die Schwingungsdauer in beiden Orientie-

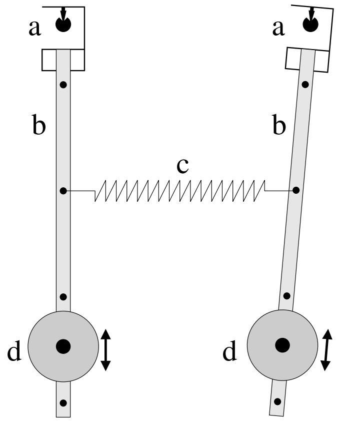


*Abbildung 5: Aufbau der gekoppelten Pendel: a) Spitzenlager mit Winkelaufnehmer, b) Pendelstange mit verschiedenen Löchern zum Einhängen der Feder, c) Feder, d) bewegliche Masse)*

rungen des Pendels:

1. Stellen Sie zunächst das Gewicht auf einen Abstand ein. Hängen Sie dann die Pendelstange in das Lager und positionieren die Lichtschranke an der Ruheposition des Pendels.
2. Lenken Sie das Pendel vorsichtig aus. Die Auslenkung am unteren Ende des Pendels darf nicht mehr als 5 cm betragen, sonst erden Abweichungen von der Kleinwinkelnäherung relevant.
3. Messen Sie mit der Lichtschranke die Pendeldauer für eine ganze Schwingung.
4. Hängen Sie das Pendel nun in der anderen Position in das Lager und messen Sie auch in dieser Position die Schwingungsdauer.

Wiederholen Sie diese Schritte nun auch für alle anderen Positionen des blauen Gewichts.

Führen Sie dabei an mehreren Positionen des Gewichts die Zeitmessung mehrere Male durch, um ein Gefühl für die Reproduzierbarkeit (Unsicherheit) zu bekommen. Dies ist aber nicht an allen Positionen nötig.

Für die Auswertung müssen Sie noch die reduzierte Länge $l_r$ bestimmen. Überlegen Sie sich, wo Sie diese am besten Messen.

## 2.2 Gekoppelte Pendel

Abbildung 5 zeigt den Aufbau der beiden Pendel für diesen Versuchsteil.

Die Aufhängung (a) der beiden (baugleichen) Pendel besteht aus je zwei Nadeln, die in Vertiefungen des Lagerstabes liegen. Im Lagerstab ist ein Magnetsensor integriert, über den die Winkelauslenkung des Pendels gemessen wird. In der Pendelstange (b) befinden sich vier Löcher, in die die Feder (c) eingehängt werden kann, um so eine Kopplung herzustellen.

**Achtung:**
**Um eine Beschädigung des Lagers zu vermeiden darf die Position des Gewichtes nur verändert werden, wenn das Pendel nicht im Lager hängt.**
**Achten Sie beim Einhängen der Pendel in das Lager darauf, dass die Lagernadeln nicht verbogen werden (vorsichtig und gerade einhängen).**

**Aufgabe 3: Einstellen der Pendellängen**

Verstellen Sie die Lage der Gewichte so, dass der Abstand der Gewichte vom Lager bei beiden Pendeln gleich ist.

Hängen Sie nun die Pendel vorsichtig in die Lager ein. Achten Sie darauf dass die auf dem Pendel angegebenen Nummern mit denen der Lager übereinstimmen (die Messelektronik der Lager ist auf die Pendel abgestimmt). Befestigen Sie noch keine Kopplungsfeder an den Pendeln.

**Aufgabe 4: Überprüfen der Schwingungsdauern**

Lenken Sie beide Pendel aus (die Auslenkung am unteren Ende des Pendels soll nicht mehr als 5 cm betragen) und lassen Sie die Pendel gleichzeitig los. Starten Sie eine Messung am Computer, um daraus die Schwingungsdauer der Pendel zu ermitteln. Überprüfen Sie die Phasenlage der beiden Schwingungen nach etwa 5 Minuten, sowohl per Auge als auch auf dem Computer. Diese darf sich nicht merklich geändert haben. Speichern Sie die Messdaten am Computer ab.

Sollte sich die Phase in der Messzeit geändert haben, wiederholen Sie die Einstellung der Pendellänge und Überprüfen Sie die Schwingungsdauern erneut.

Befestigen Sie nun eine der Kopplungsfedern zwischen den Pendeln (gleiches Befestigungsloch an beiden Pendeln wählen). Vergessen Sie nicht die Position der Feder bezüglich der Drehachse zu bestimmen und zu notieren.

**Aufgabe 5: Eigenmoden des Systems**

1. Lenken Sie beide Pendel gleich aus (gleichsinnig und gleiche Amplitude, die Amplitude soll am unteren Ende des Pendels nicht mehr als 5 cm betragen). Starten Sie eine Messung am Computer. Die Messdauer wählen Sie 30 bis 60 s. Speichern Sie die Messdaten ab.

2. Lenken Sie beide Pendel gegensinnig, aber wieder mit gleicher Amplitude aus. Starten Sie eine Messung und speichern Sie auch diese Daten ab.

**Aufgabe 6: Schwebung**

Lenken Sie ein Pendel aus der Ruhelage aus, wobei das andere in Ruhelage bleiben soll (das zweite Pendel muss eventuell festgehalten werden). Lassen Sie beide Pendel los und starten Sie eine Messung am Computer. Messen Sie mindestens solange, bis Sie bei beiden Pendeln zwei volle Schwebungsperioden auswerten können (mindestens vier sichtbare Knoten). Bei starken Kopplungen (kurzen Schwebungsperioden) liefern mehr Perioden bessere Ergebnisse.

Wiederholen Sie die Aufgaben 5 und 6 für die anderen Befestigungslöcher mit der gleichen Feder, sowie für alle Löcher mit der anderen Feder.

# 3 Auswertung

## 3.1 Reversionspendel

**Aufgabe 7:**

Stellen Sie die gemessenen Schwingungsdauern für beide Orientierungen des Reversionspendels gegen die Position des Gewichtes in *einem* Diagramm dar. Passen Sie die sich ergebenden Kurven im Bereich der Schnittpunkte mit geeigneten Funktionen an.
Für die relativ kleinen Bereiche können z.B. Parabeln verwendet werden. Diese sind aber nicht die Theoriekurven für den gesamten Bereich.

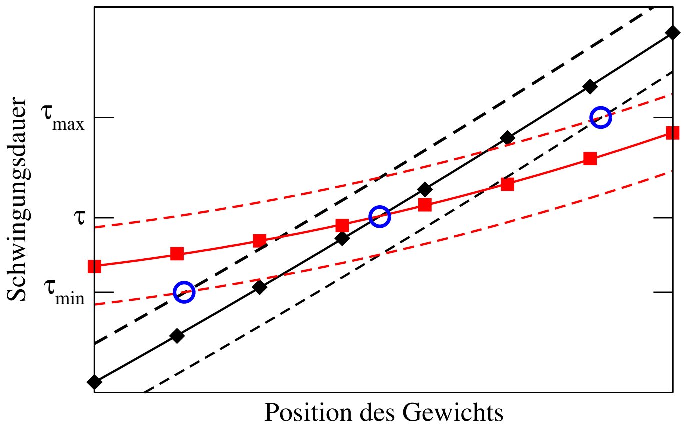


*Abbildung 6: Auswertung der Daten zum Reversionspendel. Die gesuchte Schwingungsdauer ergibt sich am Schnittpunkt der Kurven für die beiden Aufhängepunkte (schwarz und rot). Die Unsicherheit wird über eine Minimum-Maximum-Abschätzung ermittelt. Die blauen Kreise zeigen die mittlere Schwingungsdauer sowie den Maximal- und Minimalwert.*

**Aufgabe 8:**

Bestimmen an den beiden Schnittpunkten getrennt die Schwingungsdauer $\tau = \tau_1 = \tau_2$ mit Unsicherheiten.

Hinweis zur Bestimmung der Unsicherheit:
Verschieben Sie die Ausgleichskurven um eine mittleren Unsicherheit der Schwingungsdauer (welche Annahme ist sinnvoll?) nach oben und nach unten. Suchen Sie dann die maximale und minimale Schwingungsdauer $\tau_{\max}$ und $\tau_{\min}$ (vgl. Abbildung 6). Als Unsicherheit der mittleren Schwingungsdauer nehmen Sie dann $(\tau_{\max} - \tau_{\min})/2$.

**Aufgabe 9:**

Überprüfen Sie nun, ob die beiden ermittelten Schwingungsdauern im Rahmen der Unsicherheiten übereinstimmen, und bilden Sie den gewichteten Mittelwert für die Schwingungsdauer mit Unsicherheit.

**Aufgabe 10:**

Berechnen Sie aus den Messdaten nun die Erdbeschleunigung mit Unsicherheit.

## 3.2 Gekoppelte Pendel

**Aufgabe 11: Schwingungsdauern der Eigenmoden**

Bestimmen Sie aus den in Aufgabe 5 gemessenen Daten die Kreisfrequenzen $\omega_{\mathrm{gl}}$ und $\omega_{\mathrm{geg}}$ für alle Kopplungen.

Am besten geht dies durch eine Datenanpassung der Schwingungen. Man benötigt dabei jeweils vier Parameter, eine Schwingungsamplitude, die jeweilige Kreisfrequenz, eine Phase und eine Nullpunktverschiebung der Auslenkung.

Wenn die Kreisfrequenz alternativ über das Ausmessen der Schwingungsdauer bestimmt wird, ist darauf zu achten, dass über eine große Zahl an Schwingungen gemessen wird, damit die Unsicherheit klein wird (diese soll $< 0{,}5\%$ sein).

Berechnen Sie dann auch den jeweiligen Kopplungsgrad $K$.

**Aufgabe 12: Schwebung**

Bestimmen Sie die Schwebungskreisfrequenzen $\omega_S$ und die mittleren Kreisfrequenzen $\omega_M$ für alle Kopplungen aus den in Aufgabe 6 gemessenen Daten.

Am besten geht dies wieder durch eine Datenanpassung mit den sechs Parametern Schwingungsamplitude, den beiden Kreisfrequenzen mit jeweils einer Phase und einer Nullpunktverschiebung der Auslenkung.

Berechnen Sie daraus die Kreisfrequenzen der jeweiligen Grundmoden, $\omega_{gl}$, und $\omega_{geg}$ und auch den Kopplungsgrad $K$.

**Aufgabe 13: Modellbildung**

Um Theoriekurven für die beiden Kreisfrequenzen der Grundmoden, $\omega_{gl}$ und $\omega_{geg}$, sowie für den Kopplungsgrad zu finden, wird die vereinfachende Annahme gemacht, dass das Pendel nur aus dem „punktförmigen" Pendelgewicht mit der Masse $M = 1,080 \pm 0,020$ kg) und der Pendelstange mit der Masse $M = 0,160 \pm 0,005$ kg) und der Länge $l_0 = 1,030 \pm 0,020$ m besteht. Damit kann man Das Trägheitsmoment $J$ und den Faktor $D$ des rücktreibenden Moments berechnen. Weitere Hinweise dazu finden Sie im Moodle-Kurs.

Setzt man diese in die Gleichungen (30) und (35) ein, hängen $\omega_{geg}$ und $K$ nur noch vom Radius $r$ und der Federkonstante $\kappa$ ab.

**Aufgabe 14:**

Tragen Sie die Kreisfrequenzen der Grundmoden $\omega_{gl}$, $\omega_{geg}$ und den Kopplungsgrad $K$ gegen den Kopplungsradius $r$ auf. Vergleichen Sie dabei die Werte aus der direkten Messung (Aufgabe 11) mit den aus der Schwebung berechneten (Aufgabe 12).

Tragen Sie auch die Theoriekurven aus der Modellbildung ein und bestimmen Sie daraus die Federkonstanten $\kappa$ der beiden Federn.

## Hinweis zur Ausarbeitung

Die Ausarbeitung muss sich nicht an der Reihenfolge der Aufgaben halten. Sie sollen sich selbst eine geeignete Ordnung überlegen.

Bei sauberer Auswertung werden in diesem Versuch die Unsicherheiten klein. Für die Schreibweise der Unsicherheiten bietet sich daher die „Klammerschreibweise" an, z.B. $3,14159(26)$ statt $3,14159 \pm 0,00026$. Die Schreibweise der Unsicherheit muss aber in der ganzen Ausarbeitung konsistent sein.