# Ferienkurs Experimentalphysik 1

## Übungsblatt 5

**Tutoren:** Julien KOLLMANN und Luca ITALIANO

## 1 Block-Kugel-System

Ein zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhender Klotz mit Masse $M$ rutsche reibungsfrei einen Viertelkreis mit Radius $R$ hinab und gleite auf einer ebenen Fläche auf eine Kugel mit Masse $2M$ zu, die sich ein einer Kante befinde. Die Kugel werde horizontal elastisch gestoßen und falle über die Höh$h$ zu Boden.

a) Mit welcher Geeschwindigkeit $v_1$ erreicht der Klotz die Kugel?

b) Mit welcher Geschwindigkeit $v_2$ verlässt die Kugel die Schanze?

c) In welcher horizontalen Distanz $D$ zur Kante trifft die Kugel am Boden auf?

**LÖSUNG**

a) Aus der Energieerhaltung folgt:

$$E_{pot} = E_{kin} \tag{1}$$

$$MgR = \frac{1}{2}Mv_1^2 \tag{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2gR} \tag{3}$$

b) Aus Energie- und Impulserhaltung wissen wir:

$$v_2' = \frac{v_2\Delta m + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}\,. \tag{4}$$

Daraus folgt für unseren Sachzusammenhang:

$$v_2 = \frac{2}{3}v_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}\,. \tag{5}$$

c) Die Bewegung in vertikaler Richtung ist ein freier Fall:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt2\,. \tag{6}$$

Aus der Bedingung $(t_0) = 0$ erhält man eine Fallzeit von $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. In vertikaler Richtung legt die Kugel also den Weg

$$D(t) = v_2t \tag{7}$$

zurück. Damit ist die gesuchte Strecke

$$D(t_0) = \frac{2}{3}\sqrt{2gR}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4}{3}\sqrt{hR}\,. \tag{8}$$

# 2 Beschleunigte Drehbewegung

Eine Masse $m$ werde an einem Faden gehalten und kreise reibungsfrei mit Winkelgeschwindigkeit $\omega$ auf einer Bahn mit Radius $r_0$. Berechnen Sie die Arbeit die nötig ist, um den Radius durch zentralen Zug am Faden auf die Hälfte zu verkürzen.

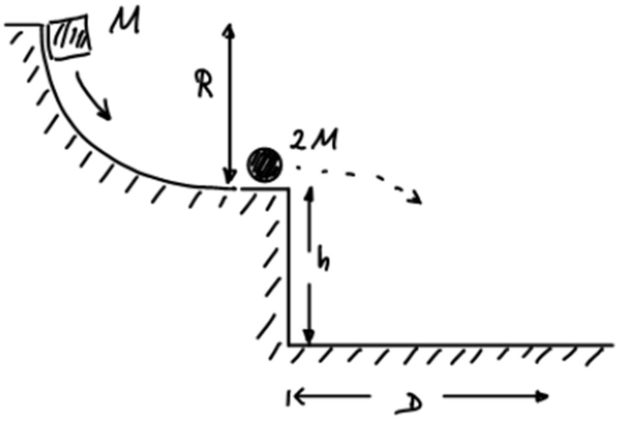


Abbildung 1: Block-Kugel-System

**LÖSUNG**
Über die Drehimpulserhaltung erhalten wir:

$$L = mr_0^2\omega_0^2 = \text{const.} \Rightarrow \omega(r) = \frac{L}{mr^2}\,. \tag{9}$$

Die zu verrichtende Arbeit ergibt sich aus der Kraft die gegen die Zentrifugalkraft aufgebracht werden muss:

$$W = -\int_{r_0}^{\frac{r_0}{2}} F_z\,dr = -\int_{r_0}^{\frac{r_0}{2}} m\omega^2 r\,dr = -\frac{L^2}{m}\int_{r_0}^{\frac{r_0}{2}} \frac{1}{r^3}\,dr = \frac{3}{2}\frac{L^2}{mr_0^2}\,. \tag{10}$$

# 3 Kugel-Block-System

Eine Kugel der Masse $m = 16$ g wird auf einen Pendelkörper eines ballistischen Pendels mit der Masse $M = 1.5$ kg abgefeuert (Abbildung 2). Die Kugel stoßt inelastisch mit dem Körper und steckt danach im Körper fest. Wenn der Pendelkörper seine maximale Höhe erreicht hat, bilden die 2.3 m langen Schnüre einen Winkel von 60° mit der Vertikalen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Einschlag.
LÖSUNG
Von der Impulserhaltung erhält man

$$mv_1 = (m+M)v_2 \tag{11}$$

und von der Energieerhaltung (vergleiche kinetische Energie unmittelbar nach Stoß mit potentieller Energie bei maximaler Höhe)

$$\frac{1}{2}(m+M)v_2^2 = (m+M)gh \tag{12}$$

Mit Trigonometrie ist $h = L(1-\cos\theta)$ und umgeformt ist

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} \Rightarrow v_1 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = 454\text{m/s} \tag{13}$$

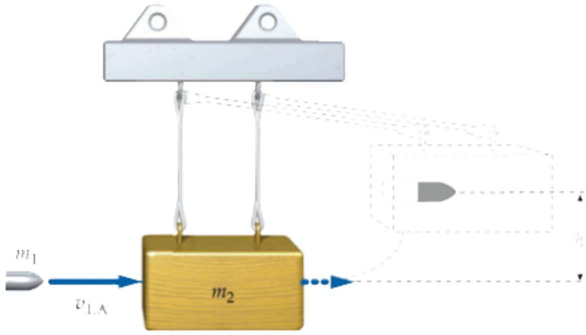


Abbildung 2: Kugel-Block-System

# 4 Pulsar

Ein kugelförmiger Stern mit Radius $r_1 = 10^6$ km und einer Rotationsdauer von einem Monat wandelt sich am Ende seiner Lebenszeit in einen gleichschweren Pulsar mit einem kleineren Radius $r_2 = 20$ km um.

a) Berechnen Sie dessen neue Umlaufzeit unter Annahme der Drehimpulserhaltung. Das Trägheitsmoment einer Kugel um eine Achse durch ihren Schwerpunkt ist $I = \frac{2}{5}MR^2$.

b) Wie ändert sich die Energie während dem Prozess?

Lösung

a) Der Drehimpuls ist $L = \frac{2}{5}MR^2\omega$ und wird erhalten. Daraus folgt

$$\omega_2 = \omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{T_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \tag{14}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 1.04\text{ms} \tag{15}$$

b) Für die Rotationsenergie gilt

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 MR^2}{5T} \tag{16}$$

Eingesetzt erhält man die Werte $E_a = 6.09 \cdot 10^{42}$ J und $E_e = 6.07 \cdot 10^{42}$ J.

# 5 Hydraulikpresse

[h] Eine Hydraulikpresse bestehe aus einem Volumen mit zwei zylinderförmigen Öffnungen mit den Flächen $A_1$ und $A_2$. In dem Volumen befinde sich eine inkompressible Flüssigkeit. Auf einer Seite werde mit einer Kraft $F_1$ auf einen Kolben gedrückt, der passgenau in der Öffnung $A_1$ sitzt. Der zweite frei bewegliche Kolben drücke gegen einen Anschlag. Gegenstände zwischen dem Kolben und dem Anschlag können so verpresst werden.

a) Geben Sie den Druck $p_1$ und $p_2$ an, sowie die Kraft $F_2$ für $F_1 = 10$N, $A_1 = 0.1\text{m}^2$ und $A_2 = 1\text{m}^2$.

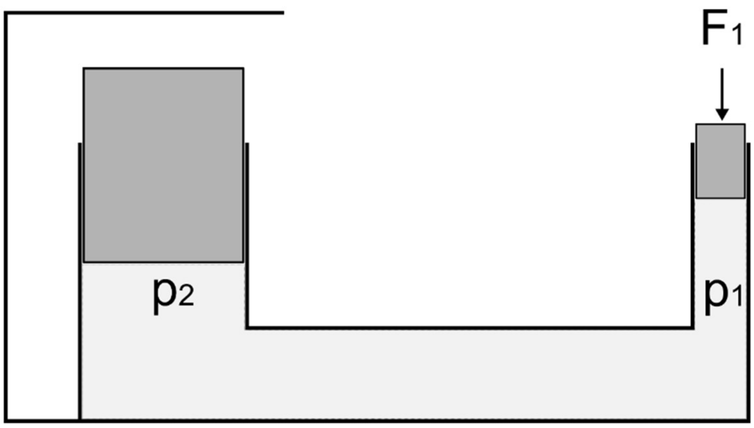


Abbildung 3: Presse

b) Berechnen und vergleichen Sie die an den Kolben verrichteten Arbeiten $W = -\int F\,dl$.

**LÖSUNG**

a) Es gilt $p = \frac{F}{A}$ und $p_1 = p_2$. Also:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = 1\text{mbar} = p_2 F_2 = p_2 A_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} = 100\text{N}\,. \tag{17}$$

b)

$$W_1 = -\int_{l_{1,0}}^{l_{1,1}} F_1\,dl = -\int_{l_{1,0}}^{l_{1,1}} pA_1\,dl = -\int_{V_{1,0}}^{V_{1,1}} p\,dV \tag{18}$$

$$W_2 = -\int_{l_{2,0}}^{l_{2,1}} F_2\,dl = -\int_{l_{2,0}}^{l_{2,1}} pA_2\,dl = -\int_{V_{2,0}}^{V_{2,1}} p\,dV \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

Die Flüssigkeit ist inkompressibel. Damit sind die Volumenänderungen identisch und die verrichtete Arbeit ist für beide Kolben die gleiche.

# 6 Physikalisches Pendel

Eine gleichförmige zylindrische Schreibe hat Radius $r = 0.8$ m und Masse $m = 6$ kg. Im Abstand $d$ vom Mittelpunkt befindet sich ein kleines Loch, an dem die Schreibe drehbar aufgehängt wird, und sie wird leicht aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt.

a) Wie groß muss $d$ sein, damit die Schwingungsdauer dieses physikalischen Pendels 2.5 Sekunden beträgt? Das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe bei Drehung um den Schwerpunkt ist $I = \frac{1}{2}MR^2$.

b) Wie groß muss $d$ sein, damit die Schwingungsdauer minimal wird? Wie groß ist diese Dauer?

LÖSUNG

a) Für das physikalische Pendel ist $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$. Mit dem Satz von Steiner ist $I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$, also gilt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2 + md^2}{mgd}} \tag{21}$$

Umgeformt ergibt sich

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{\frac{1}{2}r^2 + d^2}{gd} \Rightarrow d^2 - \frac{T^2 g}{4\pi^2}d + \frac{1}{2}r^2 = 0 \tag{22}$$

Diese quadratische Gleichung hat die zwei Lösungen $d_+ = 1.35$ m und $d_- = 0.238$ m. Davon ist nur die zweite Lösung physikalisch, da das Loch innerhalb von der Scheibe liegt und $d < r$ gelten muss.

b) Man leitet die Periodendauer nach $d$ ab und setzt diese gleich Null:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}d} = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2+d^2}{gd}}} \cdot \frac{gd \cdot 2d - (\frac{1}{2}r^2 + d^2) \cdot g}{(gd)^2} = 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow 2gd^2 = \frac{1}{2}r^2 g + gd^2 \Rightarrow d = \frac{r}{\sqrt{2}} \tag{24}$$

Eingesetzt ergibt sich für die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2}{g\frac{r}{\sqrt{2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^2}{g\frac{r}{\sqrt{2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}r}{g}} = 2.13\mathrm{s} \tag{25}$$

# 7 Trägheitsmoment

Berechne mit Integration das Trägheitsmoment einer Halbkugel mit Radius $R$ um ihre Symmetrieachse. Das Volumen müssen Sie nicht mit Integration ausrechnen - es reicht, wenn Sie die bekannte Formel verwenden.
*Hinweis:* $\int \sin^3 x\, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$ .
LÖSUNG
Bei der Halbkugel ist die geeignete Wahl der Koordinaten Kugelkoordinaten. Hier geht $\varphi$ von 0 bis $2\pi$, $r$ von 0 bis $R$ und $\theta$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \iiint_V r_\perp^2 \rho \mathrm{d}V = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{\pi/2}(r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{26}$$

$$= \frac{M}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \cdot \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} \tag{27}$$

$$= \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}\cdot 2\pi\frac{R^5}{5}\cdot\left(\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\cos^3 0}{3} + \cos 0\right) = \frac{3M}{2\pi R^3}\cdot 2\pi\frac{R^5}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{5}MR^2 \tag{28}$$