Ferienkurs Experimentalphysik 1

Übungsblatt 4

Tutoren: Julien KOLLMANN und Luca ITALIANO

1 Schwingungen

1.1 Federschwingung

Ein Körper der Masse m kann reibungslos über eine horizontale Ebene gleiten. Er ist an einer Feder der Federkonstanten $D = 48$ N/m befestigt. Seine Elongation, die in Bezug zur Gleichgewichtsposition gemessen wird, wird mit folgender Bewegungsgleichung beschrieben:

$$x(t) = X_{\text{max}} \cdot \sin(8t - \pi) \tag{1}$$

Um das Pendel zum Schwingen zu bringen gibt man ihm eine Energie von 0.24 J. Bestimme:

a) die Funktionen $v(t)$ und $a(t)$;

b) die Masse m des Körpers;

c) die Amplitude X_{max} der Bewegung;

d) die maximale Geschwindigkeit v_{max}.

LÖSUNG

a) Ableiten von $x(t)$ ergibt $v(t) = 8X_{\text{max}} \cdot \cos(8t - \pi)$ und $a(t) = -8^2 X_{\text{max}} \cdot \sin(8t - \pi)$.

b) Da die Welle von der Form $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ ist, ist $\omega = 8 = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow m = 0.75$ kg.

c) Am Anfang hat die Masse nur kinetische Energie. Bei $t = 0$ ist

$$v(0) = 8X_{\text{max}} \cdot \cos(-\pi) = -8X_{\text{max}} \tag{2}$$

Also gilt für die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m8^2X_{\text{max}}^2 = 0.24\text{J} \tag{3}$$

Auflösen nach X_{max} ergibt eine Amplitude von 0.1 m.

d) Die Maximalgeschwindigkeit bei einer Schwingung tretet immer auf, wenn die Masse durch ihre Gleichgewichtsposition geht. Da die Masse bei $t = 0$ in ihrer Gleichgewichtsposition ist gilt:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{max}} = E_{\text{kin}} \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m}} = 0.8\text{m/s} \tag{4}$$

1.2 Bungee-Jumping

Ein Bungee-Jumper möchte von einer Brücke springen, die bei einer Höhe von 45 m über einen Fluss ist. Da er Physik studiert, versucht er vorher auszurechnen, ob er vor dem Eintauchen ins Wasser den Umkehrpunkt seiner Bewegung erreicht. Im entspannten Zustand hat das masselose Bungee-Seil eine Länge von $L = 25$ m und im gedehnten Fall eine Länge von $L + \Delta L$. Das Seil gehorche dem Hook'schen Gesetz bei der Dehnung mit $D = 160$ N/m und ist mit einem ende am Absprungpunkt und mit dem anderen ende am Fuß des Bungee-Jumpers festgemacht. Die Körpergröße des Bungee-Jumpers ist $L_0 = 1.8$ m und der Schwerpunkt befindet sich in der Mitte des Körpers.

a) Welche Masse darf der Bungee-Jumper maximal haben, damit er gerade nicht ins Wasser eintaucht?

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Bungee-Jumpers nach 25 m im freien Fall.

c) Welche Kräfte wirken am unteren Umkehrpunkt auf den Bungee-Jumper und wie groß sind diese, falls der Bungee-Jumper eine Masse von $m = 60$ kg besitzt?

Lösung

a) Energie im Seil am Umkehrpunkt: $\frac{1}{2}D(\Delta L)^2$
Investierte potentielle Energie: $mg(L+\Delta L+2\frac{1}{2}L_0)$ (vor dem Sprung ist sein Schwerpunkt $L_0/2$ über der Brücke, am Umkehrpunkt ist sein Schwerpunkt $L_0/2$ unter dem Aufhängepunkt des Seils)
ΔL darf maximal $45 - L - L_0 = 18.2$ m sein, da die gesamte Länge des Bungee-Jumpers über das Wasser sein soll. Daraus folgt:

$$mg(L + \Delta L + L_0) = \frac{1}{2}D(\Delta L)^2 \Rightarrow m = \frac{D(\Delta L)^2}{2g(L + \Delta L + L_0)} \tag{5}$$

b) Mit $s = \frac{1}{2}gt^2$ ist $v = gt = g\sqrt{\frac{2L}{g}} = 22.1$ m/s.

c) Es wirkt die Schwerkraft und die Federkraft vom Seil.
Schwerkraft: $mg = 588,6$ N (nach unten) Seil: $-D\Delta L = -2912$ N (nach oben)

1.3 Gedämpfte Federschwingung

Ein 100 g schwerer Körper an einer Feder mit $D = 10$ N/m und Reibungsfaktor $b = 0.02$ kg/s wird um $x_0 = 10$ cm ausgelenkt und losgelassen.

a) Berechne die Periodendauer T und die Halbwertszeit $t_{1/2}$ der Schwingung.
Hinweis: der Reibungsfaktor b, der in der Reibungskraft $F_R = -b\dot{x}$ *dabei ist, ist nicht das gleiche wie der Dämpfungskonstante* γ *- es gilt* $2\gamma = \frac{b}{m}$.

b) Nach wie vielen Schwingungen hat sich die Auslenkung halbiert?

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit v beim ersten Durchgang durch die Gleichgewichtlage?

Lösung

a) Die Dämpfungskonstante ist $\gamma = \frac{b}{2m} = 0.1$ 1/s und damit ist die Halbwertszeit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma} = 6.93$ s. Bei der gedämpften Schwingung ist die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{D}{m} - \gamma^2} = 10.0$ rad/s, also $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.628$ Sekunden.

b) Die Auslenkung halbiert sich nach einer Halbwertszeit. $\frac{t_{1/2}}{T} \approx 11.0$, also braucht es 11 Schwingungen, um die Auslenkung zu halbieren.

c) Bei der gedämpften Schwingung beschreibt man die Position der Masse mit $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t)$. Nach der Zeit abgeleitet ergibt $v(t) = -Ae^{-\gamma t}(\gamma\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t))$. Die Masse durchquert ihre Gleichgewichtslage nach einer viertel Periode, also gilt für die Geschwindigkeit $v\left(\frac{T}{4}\right) = -0.984$ m/s.

1.4 Physikalisches Pendel

Eine dünne gleichförmige Scheibe mit $m = 5$ kg und $r = 20$ cm ist an einer festen horizontalen Achse aufgehängt, die senkrecht zur Scheibe durch deren Rand verläuft. Die Scheibe wird leicht aus dem Gleichgewicht ausgelenkt und losgelassen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer der darauffolgenden harmonischen Schwingung.
Hinweis: das Trägheitsmoment einer dünnen Scheibe bezüglich dem Mittelpunkt ist $\frac{1}{2}mr^2$.

LÖSUNG
Die Kreisfrequenz bei der Schwingung eines physikalischen Pendels ist

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{6}$$

wo d der Abstand zwischen Drehachse und Schwerpunkt ist. Mit dem Satz von Steiner ist das Trägheitsmoment einer Scheibe um einer Achse senkrecht zur Scheibe auf deren Rand

$$I = I_S + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 \tag{7}$$

Für die Periode erhält man schließlich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} = 1.1\text{s} \tag{8}$$

2 Wellen

2.1 Orgelpfeife

Eine an beiden Enden offene Orgelpfeife ist 1.5 m lang. Verwende $c = 343$ m/s für die Schallgeschwindigkeit.

a) Berechne ihre Grundfrequenz.

b) Durch einen Schieber wird die Pfeife in der Mitte geschlossen. Berechne nun die Grundfrequenz.

c) Vergleiche bei a) und b) die 1. Oberschwingung.

Lösung

a) Bei der Grundfrequenz ist $\lambda = 2L$, also ist $f_0 = \frac{c}{2L} = 114$ Hz.

b) Schließt man die Mitte der Pfeife betrachtet man nun eine stehende Welle mit einem offenen Ende und einem geschlossenen Ende. Da gilt $\lambda = 4L'$, wo $L' = \frac{L}{2}$ die neue Länge ist. Dadurch ist $\lambda = 4\frac{L}{2} = 2L$ und die Grundfrequenz ist gleich wie bei a).

c) Für die erste Oberschwingung bei a) hat man 3 Wellenbäuche und es gilt $\lambda = L$, also $f = \frac{c}{L} = 229$ Hz.
Bei einem offenen Ende und einem geschlossenen Ende hat man bei der ersten Oberschwingung 2 Knoten und 2 Bäuche. Es ist $\lambda = \frac{4}{3}L' = \frac{2}{3}L \Rightarrow f = \frac{3c}{2L} = 343$ Hz.

2.2 Doppler-Effekt

Ein Auto nähert sich einer reflektierenden Wand. Ein ruhender Beobachter hinter dem Auto hört einen Ton der Frequenz von 745 Hz von der Autohupe und einen Ton der Frequenz 863 Hz von der Wand. Verwende $c = 343$ m/s für die Schallgeschwindigkeit.

a) Wie schnell fährt das Auto?

b) Welche Frequenz hat die Autohupe?

c) Welche Frequenz hört der Autofahrer in der Welle, die von der Wand reflektiert wird?

Lösung

Wir verwenden die Formel $f_B = \frac{c \pm v_B}{c \pm v_Q} f_Q$ und überlegen uns bei jeder Aufgabe, was unser Beobachter bzw. Quelle ist.

a) Der ruhende Beobachter hinter dem Auto hört eine kleinere Frequenz f_B als die tatsächliche Frequenz der Autohupe f_A, da sich das Auto von ihm entfernt. Es gilt also

$$f_B = \frac{c}{c + v_A} f_A \tag{9}$$

Für die Wand ist die empfangene Frequenz f_W höher, da sich das Auto zur Wand fährt.

$$f_W = \frac{c}{c - v_A} f_A \tag{10}$$

Da diese Frequenz reflektiert wird und sich weder die Wand noch der Beobachter bewegen ist $f_W = 863$ Hz. Teilt man eine Gleichung durch die andere erhält man

$$\frac{f_B}{f_W} = \frac{c - v_A}{c + v_A} \Rightarrow v_A = \frac{c(f_W - f_B)}{f_W + f_B} = 25.2\text{m/s} \tag{11}$$

b) Löst man einer der zwei Gleichungen nach f_A auf und setzt die Geschwindigkeit ein erhält man $f_A = \frac{f_B(c+v_Q)}{c} = 800$ Hz.

c) Die Wand reflektiert den Ton mit einer Frequenz $f_W = 863$ Hz. Jetzt ist die Wand die stationäre Quelle und das Auto der Beobachter, der zur Wand hinfährt. Die wahrgenommene Frequenz f'_A soll höher sein als f_W, also ist

$$f'_A = \frac{c + v_A}{c} f_W = 926\text{Hz} \tag{12}$$