Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

# Experimentalphysik 1

WS 2021/22

# Vorlesung 4

Julien Kollmann (julien.kollmann@tum.de)
Luca Italiano (luca.italiano@tum.de)

Basierend auf dem Skript von Ronja Berg und Katharina Scheidt, angepasst von Elena Kaiser und Gloria Isbrandt

## Inhaltsverzeichnis

# 6 Harmonische Oszillatoren

## 6.1 Freier ungedämpfter Oszillator

Für den harmonischen Oszillator gilt das lineare Kraftgesetz

$$\boldsymbol{F} = -Dx\hat{\boldsymbol{e_x}} \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{F}$ die Rücktreibende Kraft ist, $D$ die Federkonstante und $x$ die Auslenkung von der Ruhelage $x = 0$. Als Bewegungsgleichung erhält man hiermit

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -Dx(t) \quad . \tag{2}$$

Mit dem Ausdruck $\omega_0^2 = D/m$, wobei $\omega_0$ die Kreisfrequenz ist, erhält man nun die allgemeine Bewegungsgleichung einer freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad . \tag{3}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die stets zwei linear unabhängige Lösungen besitzt. Sie kann mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{4}$$

gelöst werden. Durch Ableiten und Einsetzen in Gleichung (3) erhalten wir das sogenannte charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad . \tag{5}$$

Die Lösungen für die Konstanten $\lambda$ berechnen sich nun zu

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad . \tag{6}$$

Das heißt $x_1(t) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\omega_0\cdot t}$ und $x_2(t) = c_2 \cdot \mathrm{e}^{-i\cdot\omega_0\cdot t}$ lösen die Differentialgleichung. Die Linearkombination aus $x_1(t)$ und $x_2(t)$ muss eine reelle Funktion sein und somit muss $c_1 = c_2^* = c$ für die komplexen Konstanten gelten. Die Lösungsfunktion hat somit die Gestalt

$$x(t) = c\mathrm{e}^{i\omega_0 t} + c^*\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \quad . \tag{7}$$

Über eine Polardarstellung der komplexen Amplituden und der Verwendung der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ lässt sich Gleichung (7) wie folgt darstellen

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + C_2 \cdot \sin(\omega_0 t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad . \tag{8}$$

Die Koeffizienten $A$, $C_1$ und $C_2$ können über die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Schwingungen, die zur Zeit $t = 0$ eine verschwindende Geschwindigkeit haben, sind reine Kosinus-Schwingungen. Ist der Oszillator zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage und besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit, so ist es eine reine Sinus-Schwingung.

Die Schwingungsdauer $T$, die Schwingungsfrequenz $f$ und die Kreisfrequenz $\omega$ berechnen sich dabei über

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f \quad . \tag{9}$$

## 6.2 Freier gedämpfter Oszillator

Herrschen zusätzlich Reibungskräfte während der Schwingung, wird die Oszillation gedämpft und es muss ein zusätzlicher Term in der Bewegungsgleichung beachtet werden. Normalerweise ist diese Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und wirkt der Bewegung entgegen

$$\boldsymbol{F}_R = -b\dot{x}\hat{\boldsymbol{e}_x} \quad . \tag{10}$$

Für die allgemeine Bewegungsgleichung kann der Ausdruck $2\gamma = b/m$ verwendet werden, sodass man analog zu Gleichung (3)

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{11}$$

mit Dämpfungskonstante $\gamma$ erhält. Wie auch bei der ungedämpften Schwingung kann diese Differentialgleichung mit dem Ansatz $x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ gelöst werden. Im charakteristischen Polynom ist nun ein zusätzlicher Term vorhanden

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{12}$$

und die Lösungen dieser Gleichung für die Konstanten $\lambda$ sind

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad . \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung einer gedämpften Schwingung (11) lautet somit

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\right] \quad . \tag{14}$$

Es gilt nun drei Fälle zu unterscheiden, abhängig davon ob $\gamma^2 - \omega_0^2$ positiv, negativ oder genau null ist.

**Schwache Dämpfung:** Ist $\gamma < \omega_0$ so ist die Wurzel imaginär und der Exponent enthält einen komplexen Wert. Mit $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ lässt sich die allgemeine Lösung umschreiben zu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[c\sin(\omega\cdot t) + c^*\cos(\omega\cdot t)\right] = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega\cdot t + \varphi) \quad . \tag{15}$$

Hierbei ist die Frequenz der Schwingung $\omega$ gering im Vergleich zur Frequenz $\omega_0$ der ungedämpften Schwingung. Zusätzlich nimmt die Amplitude der Schwingung exponentiell mit der Zeit ab. Man definiert das logarithmische Dekrement $\Lambda$ als

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \gamma T \tag{16}$$

wo $x_i$ und $x_{i+1}$ die nachfolgende maximale Auslenkungen sind. Bei der schwachen Dämpfung ist $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma}$ die Halbwertszeit - nach dieser Zeit ist die Amplitude der Schwingung zu einer Hälfte ihres originalen Wertes gefallen.

**Starke Dämpfung:** Ist $\gamma > \omega_0$ so ist die Wurzel positiv und der Exponent reell. Mit $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ erhalten wir eine allgemeine Lösung ohne einen oszillieren Teil

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[C_1\mathrm{e}^{\alpha t} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha t}\right] \quad . \tag{17}$$

Nach einmaliger Auslenkung "kriecht" die Amplitude für $t \to \infty$ gegen null.

**Aperiodischer Grenzfall:** Im Grenzfall ist $\gamma = \omega_0$ und die Lösungen $\lambda_{1,2}$ sind nun entartet $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$. Da eine Differentialgleichung 2. Ordnung aber immer zwei Lösungen haben muss, benutzen wir folgenden Ansatz

$$x(t) = C(t)\mathrm{e}^{\gamma t} \tag{18}$$

mit einem zeitabhängigen Vorfaktor $C(t)$. Setzen wir dies in die Bewegungsgleichung ein, so erhalten wir die allgemeine Lösung

$$x(t) = (C_1 \cdot t + C_2 \cdot)\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad . \tag{19}$$

Es kommt zu einer ähnlichen Bewegung wie im Kriechfall, nur wird der Nullpunkt im aperiodischen Grenzfall schneller angestrebt.

## 6.3 Erzwungene Schwingungen

Bei einer erzwungen Schwingung kommt es zu einer zusätzlichen äußeren antreibenden Kraft $F_{ext}(t)$, normalerweise in Form einer periodisch oszillierenden Kraft. Diese muss in der Bewegungsgleichung beachtet werden

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - b\dot{x}(t) + F_{ext}\cos(\omega t) \quad . \tag{20}$$

Für diese inhomogene Differentialgleichung erhalten wir eine Lösung, die sich aus Lösung der homogenen DGL und einer speziellen, der sogenannten partikulären Lösung zusammensetzt.

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) + C_2\cos(\omega t + \varphi) \tag{21}$$

Der erste Term ist die Lösung eines freien, gedämpften Oszillators und der zweite kommt durch den Beitrag der Anregungsfrequenz zustande. Hierbei ist $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ die Frequenz der freien gedämpften Schwingung.
Nach einiger Zeit tritt der stationäre Zustand ein bei dem die Amplitude $C_1\mathrm{e}^{-\gamma t}$ gegen null geht. Dann bestimmt ausschließlich der zweite Term die Bewegung. Setzt man diesen in die Bewegungsgleichung ein lässt sich die Phasenverschiebung $\varphi(\omega)$ der erzwungenen Schwingung berechnen. Diese ergibt sich zu

$$\tan(\varphi(\omega)) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{22}$$

wobei man durch das negative Vorzeichen erkennt, dass sie stets der Erregerfrequenz nachhinkt. Die Amplitude $C_2$ des Anregungsanteils ist auch frequenzabhängig:

$$C_2(\omega) = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \tag{23}$$

Das Maximum dieser Funktion liegt bei der Resonanzfrequenz des Systems, $\omega = \omega_0$. Je kleiner die Dämpfungskonstante ist, desto größer wird diese maximale Amplitude bei der Resonanzfrequenz.

### 6.4 Energiebilanz

Die kinetische Energie des harmonischen Oszillators ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad . \tag{24}$$

ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t E_{kin} = \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t \sin^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \quad . \tag{25}$$

Die potentielle Energie des harmonischen Oszillators ist mit $D = m\omega_0^2$

$$E_{pot} = \int_0^x \mathrm{d}x' F = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad . \tag{26}$$

Ihr Mittelwert über eine Schwingungsperiode T ist

$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t E_{pot} = \frac{1}{T}\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \underbrace{\int_0^T \mathrm{d}t \cos^2(\omega_0 t)}_{=T/2} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 \quad . \tag{27}$$

Die Summe von kinetischer und potentieller Energie beim harmonischen Oszillator

$$E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \left[\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = E = const. \tag{28}$$

ist zu **jedem** Zeitpunkt gleich der konstanten Gesamtenergie des Systems (Energiesatz). Die Mittelwerte $\overline{E_{kin}}$ und $\overline{E_{pot}}$ sind bei der harmonischen Schwingung gleich. Sie sind proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude $A$ und der Frequenz $\omega_0$.

## 7 Mechanische Wellen

Breiten sich Schwingungen durch die Kopplung von Oszillatoren aus, so spricht man von einer Welle. Eine Welle transportiert Energie und Impuls ohne gleichzeitigen Materietransport. Analog zur Beschreibung eines harmonischen Oszillators lässt sich eine eindimensionale ebene Welle definieren. Breitet sich diese mit der Zeit $t$ in $z$-Richtung aus, kann sie durch folgende Formel beschrieben werden

$$\xi(z,t) = A\sin(\omega t - kz) \qquad \text{oder} \qquad \xi(z,t) = C\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \quad . \tag{29}$$

Hierbei ist $k$ die Wellenzahl, die von der Wellenlänge abhängt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Die Phasengeschwindigkeit $v_{ph}$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = f\lambda \tag{30}$$

ist die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt konstanter Amplitude auf der Welle (z.B. ein Wellenberg) bewegt. Zur Beschreibung des Energietransports betrachtet man die kinetische Energie eines Massenelements $\Delta m$, das mit $\xi(t,z) = A\cos(\omega t - kz)$ oszilliert. Sie ist gegeben als

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Delta m\dot{\xi}^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz) \quad . \tag{31}$$

Die mittlere kinetische Energiedichte, $\overline{E_{kin}}$, pro Schwingungsperiode und Volumenelement $\Delta V$ berechnet sich dadurch zu

$$\frac{\overline{E_{kin}}}{\Delta V} = \frac{1}{4}\rho A^2\omega^2 = \frac{\overline{E_{pot}}}{\Delta V} \quad . \tag{32}$$

Mit $W = E_{kin} + E_{pot}$ ergibt sich die Gesamtenergiedichte $\rho_E$ zu

$$\rho_E = \frac{W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \quad . \tag{33}$$

Die Intensität der Welle als Produkt aus Phasengeschwindigkeit und Gesamtenergiedichte

$$I = v_{ph}\rho_E = \frac{1}{2}v_{ph}\rho A^2\omega^2 \tag{34}$$

ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude $A$ und ihrer Frequenz $\omega$.

## 7.1 Wellengleichung

Die zeitliche und räumliche Entwicklung einer Welle wird durch die Wellengleichung beschrieben. Durch die Kopplung der Oszillatoren hat die Auslenkung eines Oszillators eine Auswirkung auf die Nachbaroszillatoren. Unter der Annahme, dass sich die Form der Auslenkung $\xi(z)$ bei der Ausbreitung in $z$-Richtung nicht ändert können die Wellenfunktionen $\xi(z,t)$ als Funktion des Argumentes $z - vt$ angesehen werden. Bei zweimaligem partiellen Differenzieren nach der Zeit $t$ und dem Ort $z$ lässt sich folgender Zusammenhang erkennen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad . \tag{35}$$

für eine ebene Welle die sich mit Phasengeschwindigkeit $v = v_{ph}$ ausbreitet. Dies ist die allgemeine Wellengleichung, die nicht nur für mechanische, sondern auch für elektromagnetische Wellen gilt. Die allgemeinste Lösung der Wellengleichung ist $\epsilon(z,t) = A\sin(\omega t - kz + \phi)$, wo $\phi$ eine Phasenverschiebung ist.

Betrachtet man nicht nur monochromatische Wellen sondern Wellenpakete oder einen Wellenimpuls, so stellt man die Welle als Superposition von monochromatischen Frequenzanteilen mit Hilfe der Fourierzerlegung dar.

$$\xi(t,z) = \int_0^\infty A(\omega)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}\mathrm{d}\omega \qquad \text{und} \qquad A(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \xi(t,z)\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)}\mathrm{d}t \tag{36}$$

Solche superpositionierten Wellen bestehen aus einer Einhüllenden und einem schnellen Frequenzanteil. Das Maximum der Einhüllenden bewegt sich mit der sogenannten Gruppengeschwindigkeit $v_g$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}v_{ph}k}{\mathrm{d}k} = v_{ph} + k\frac{\mathrm{d}v_{ph}}{\mathrm{d}k} \tag{37}$$

Falls es keine Dispersion gibt, also $v_{ph}$ nicht von der Wellenlänge $\lambda$ bzw. der Wellenzahl $k$ abhängt, so entspricht die Gruppengeschwindigkeit der Phasengeschwindigkeit.

In verschiedenen Medien kann man die Phasengeschwindigkeit unterschiedlich berechnen. Tritt in einem angespannten Seil eine Welle auf, ist die Phasengeschwindigkeit der Welle gegeben durch

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \tag{38}$$

Hier ist $F_T$ die Seilspannung und $\mu$ die lineare Massendichte, also Masse/Länge.

## 7.2 Überlagerung von Wellen

Die Überlagerungen von Wellen werden allgemein als Interferenz bezeichnet. Die Konstruktion eines allgemeinen Intereferenzmusters erfolgt mit dem Huygenschen Prinzip.
**Huygensches Prinzip:** Jeder Punkt einer allgemeinen Wellenfront ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle. Die neue Wellenfront ist die Tangentialfläche an die Kugelwellen.
Bei Kugelwellen nimmt die Amplitude rasch mit dem Abstand ab:

$$\xi(r,t) = f(r)\sin(\omega t - kr) \quad \text{mit} \quad f(r) \propto \frac{1}{r} \tag{39}$$

Ein oft vorkommendes Beispiel ist die Superposition von zwei Wellen $\epsilon_1 = A\cos\omega_1 t$ und $\epsilon_2 = A\cos\omega_2 t$ mit gleicher Amplitude und leicht verschiedenen Frequenzen. Addiert man diese zusammen gilt mit dem Additionstheorem

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \tag{40}$$

dass die resultierende Welle die folgende Form hat:

$$\epsilon_{\text{ges}} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \tag{41}$$

Durch den $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$-Term oszilliert die Welle schnell, jedoch wirkt der $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$-Term wie eine Einhüllende für die Amplitude.

Bei der Überlagerung von laufenden Wellen kann es zu räumlich stationären Schwingungsmustern kommen, bei denen bestimmte Punkte im Raum in Ruhe sind. Diese Punkte werden Schwingungsknoten genannt. Ihre Lage ist von der Frequenz und den Randbedingungen abhängig. Die Amplitude solcher Wellen hängt periodisch vom Ort ab. Die Wellengleichung einer so genannten **stehenden Welle** ist

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(kz - \frac{\varphi}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}) \quad . \tag{42}$$

Stehende Wellen treten auf einem begrenzten Wellenträger der Länge $l$ nur auf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Ein festes und ein freies Ende: $\lambda_n = 4l/(2n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0$
2. Zwei feste oder zwei freie Enden: $\lambda_n = 2l/(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_0$

Das heißt, nur bei bestimmten (Eigen-)Frequenzen, können sich stehende Wellen ausbilden.

### 7.3 Wellen bei bewegten Quellen

Bewegen sich Quelle, Beobachter oder das Medium in dem sich die Welle ausbreitet so kommt es zu einer Frequenzverschiebung, dem so genannten **Doppler-Effekt**. Bewegt sich die Quelle mit $v_q$ in Ausbreitungsrichtung der Welle, so verringert sich der Abstand $\Delta x$ zwischen den Wellenbergen im Vergleich zum stationären Fall. Die resultierende Frequenzverschiebung vor und hinter der Quelle ergibt sich dann zu

$$f_{vor} = \frac{f_0}{1 - \frac{v_q}{v_l}} > f_0 \quad \text{und} \quad f_{nach} = \frac{f_0}{1 + \frac{v_q}{v_l}} < f_0 \tag{43}$$

wobei $v_l$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist. Ist der Beobachter in Bewegung mit Geschwindigkeit $v_b$ und die Quelle ist fest, so erhält man

$$f_{zu} = f_0 \left(1 + \frac{v_b}{v_l}\right) > f_0 \quad \text{und} \quad f_{weg} = f_0 \left(1 - \frac{v_b}{v_l}\right) < f_0 \quad . \tag{44}$$

# 8 Differentialgleichungen lösen

## 8.1 Charakteristische Gleichung der Exponentialfunktion

Leitet man eine Exponentialfunktion

$$x(t) = A\mathrm{e}^{Bt} \tag{45}$$

nach der Zeit ab, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = A \cdot B\mathrm{e}^{Bt} = B \cdot x(t) \tag{46}$$

also eine Funktion, die die gleiche Form wie die ursprüngliche Funktion $x(t)$ hat, und nur um einen bestimmten Faktor $B$ gestreckt ist. Dieses Wissen können wir beim Lösen von Differentialgleichungen benutzen. Eine einfache homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat zum Beispiel die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \dot{x}(t) = cx(t) \quad . \tag{47}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Exponentialfunktion

$$x(t) = A\mathrm{e}^{ct} \quad . \tag{48}$$

Die Werte für $A$ und $c$ lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

## 8.2 Trennung der Variablen

Für separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es eine einfache Lösung durch den Separationsansatz. Separierbare Gleichungen sind Gleichungen, die von mehreren Variablen abhängen und bei denen die Variablen getrennt werden können. Ein Beispiel ist

$$\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x) \quad . \tag{49}$$

Diese Gleichung kann man nun so umformulieren, dass eine Seite nur noch von $x$ abhängt und die andere nur von $t$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(x)}\mathrm{d}x = f(t)\mathrm{d}t \quad . \tag{50}$$

Um nun auf die Lösung zu kommen integriert man beide Seiten. Hier gibt es jedoch zwei mögliche Lösungswege. Entweder löst man ein bestimmtes Integral und nutzt bereits die Anfangsbedingungen um die Integralgrenzen zu bestimmen oder man löst die unbestimmten Integrale. Im zweiten Fall werden die Anfangsbedingungen benutzt um die Integrationskonstante anzupassen. Mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ erhält man als bestimmte Integrale

$$\int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int\limits_{t_0}^{t} f(t)\mathrm{d}t \tag{51}$$

und im Falle der Lösung durch unbestimmte Integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t + C \quad . \tag{52}$$

Die Integrationskonstante C muss nun mit Hilfe der Anfangsbedingung angepasst werden.

## 8.3 Variation der Konstanten

Ist eine Differentialgleichung gegeben, die eine Inhomogenität hat, in diesem Falle $s(t)$,

$$\dot{x}(t) + f(t)\,x(t) = s(t) \tag{53}$$

so setzt sich die Lösung immer aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $s(t) = 0$ und einer partikulären Lösung zusammen

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \quad . \tag{54}$$

Eine Möglichkeit eine solche Gleichung zu lösen ist die Variation der Konstanten. Hierbei wird zunächst die homogene Gleichung gelöst und dann eine zeitliche Abhängigkeit der Integrationskonstanten $C$ für die partikuläre Lösung angesetzt. Als homogene Lösung erhält man

$$x_{hom}(t) = C\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t} \tag{55}$$

und setzt dann für die partikuläre Lösung

$$x_{part}(t) = C(t)\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t} \tag{56}$$

an. Durch Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung kann die Integrationskonstante ermittelt werden und schließlich erhält man für die Gesamtlösung

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}t\; s(t)\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t} \quad . \tag{57}$$

## 8.4 Ansatz von der rechten Seite

Zur Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x = c \tag{58}$$

kann der Ansatz von der rechten Seite gewählt werden. Dabei geht man davon aus, dass die Lösung der Differentialgleichung eine ähnliche Form hat wie die Störfunktion selbst. Für die Bestimmung der homogenen Lösung kann der Ansatz

$$x_{hom}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{59}$$

benutzt werden. Dabei kommt man auf ein charakteristisches Polynom, durch das wir zwei verschiedene Werte für $\lambda$ erhalten. Als homogene Lösung bekommt man dann

$$x_{hom}(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \quad . \tag{60}$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir nun eine Funktion, welche die Gestalt der Störfunktion hat, in diesem Fall eine Konstante $K$. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung können wir diese Konstante genau bestimmen

$$x_{part}(t) = K \qquad \overset{\text{In DGL einsetzten}}{\Longrightarrow} \qquad K = \frac{c}{\omega_0^2} \quad . \tag{61}$$

Haben wir nun eine komplizierte Störung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x = 5\mathrm{e}^{-3t} \tag{62}$$

dann können wir die Differentialgleichung nach dem gleichen Prinzip lösen. Wir machen nun für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$x_{part}(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-3t} \tag{63}$$

und erhalten für die Konstante $K$ und die partikuläre Lösung

$$K = \frac{5}{9 - 6\gamma - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad x_{part}(t) = \frac{5}{9 - 6\gamma - \omega_0^2}\mathrm{e}^{-3t} \quad . \tag{64}$$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zusammen mit der homogenen Lösung aus Gleichung (60) nach Bestimmung der Konstanten $c_1$ und $c_2$ durch die Anfangsbedingungen.