Ferienkurs Experimentalphysik 1

Übungsblatt 2

Tutoren: Julien Kollmann und Luca Italiano

1 Impuls

1.1 Zweidimensionaler Stoß

Ein Teilchen hat eine Anfangsgeschwindigkeit v_0. Es stößt mit einem ruhenden Teilchen derselben Masse zusammen und wird um einen Winkel ϕ abgelenkt. Seine Geschwindigkeit nach dem Stoß ist v. Das zweite Teilchen erfährt einen Rückstoß, und seine Richtung bildet einen Winkel θ mit der ursprünglichen Richtung des ersten Teilchens (Abbildung 1).

a) Zeigen Sie, dass $\tan\theta = (v\sin\phi)/(v_0 - v\cos\phi)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für den Fall eines elastischen Stoßes $v = v_0\cos\phi$ gilt.
Hinweis: Pythagoras!

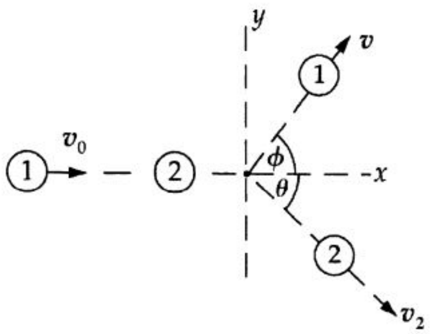

Abbildung 1: Stoß in Aufgabe 1.1

Lösung

a) Es gilt Impulserhaltung in beiden Richtungen. In y-Richtung:

$$p_{\text{y,davor}} = 0 = p_{\text{y,danach}} = mv\sin\phi - mv_2\sin\theta \Rightarrow v_2 = \frac{v\sin\phi}{\sin\theta} \tag{1}$$

In x-Richtung:

$$p_{\text{x,davor}} = mv_0 = p_{\text{x,danach}} = mv\cos\phi + mv_2\cos\theta \tag{2}$$

Einsetzen von v_2 und umformen nach $\tan\theta$ liefert das richtige Ergebnis.

$$v_0 = v\cos\phi + v_2\cos\theta = v\cos\phi + \frac{v\sin\phi}{\tan\theta} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta(v_0 - v\cos\phi) = v\sin\phi \Rightarrow \tan\theta = \frac{v\sin\phi}{v_0 - v\cos\phi} \tag{4}$$

b) Von der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_0^2 = v^2 + v_2^2 \tag{5}$$

Von Pythagoras bilden die Geschwindigkeitsvektoren ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse v_0. Es gilt also $\cos\phi = v/v_0$.

1.2 Elastischer Stoß beim Neutron

Ein Neutron der Masse m_n stößt elastisch zentral mit einem ruhenden Atomkern der Masse m_k zusammen.

a) Zeigen Sie, dass für die kinetische Energie des Kerns $T_{\text{K,e}}$ nach dem Stoß gilt:

$$T_{\text{K,e}} = T_{\text{N,a}} \cdot \frac{4m_N m_K}{(m_N + m_K)^2} \tag{6}$$

wo $T_{\text{N,a}}$ die kinetische Energie des Neutrons vor dem Stoß ist.
Hinweis: verwende $T = \frac{p^2}{2m}$.

b) Zeigen Sie, dass für den Energieverlust des Neutrons gilt:

$$\frac{\Delta T_{\text{N}}}{T_{\text{N,a}}} = \frac{-4(m_N/m_K)}{(1 + (m_N/m_K))^2} \tag{7}$$

c) Was passiert, wenn die Neutronenmasse viel kleiner als die Kernmasse ist?

d) Bei welchem Masseverhältnis wird der Energieverlust maximal?

LÖSUNG

a) Es gilt die Energie- sowie Impulserhaltung.

$$\frac{p_{\text{N,a}}^2}{2m_N} = \frac{p_{\text{N,e}}^2}{2m_N} + \frac{p_{\text{K,e}}^2}{2m_K} \tag{8}$$

$$p_{\text{N,a}} = p_{\text{N,e}} + p_{\text{K,e}} \tag{9}$$

Setze $p_{\text{N,e}} = p_{\text{N,a}} - p_{\text{K,e}}$ in die erste Gleichung ein:

$$\frac{p_{\text{N,a}}^2}{2m_N} = \frac{p_{\text{N,a}}^2}{2m_N} - \frac{2p_{\text{N,a}}p_{\text{K,e}}}{2m_N} + \frac{p_{\text{K,e}}^2}{2m_N} + \frac{p_{\text{K,e}}^2}{2m_K} \tag{10}$$

$$\frac{p_{\text{N,a}}}{m_N} = \frac{p_{\text{K,e}}}{m_N} + \frac{p_{\text{K,e}}}{m_K} = \frac{p_{\text{K,e}}}{2}\left(\frac{m_N + m_K}{m_N m_K}\right) \Rightarrow p_{\text{N,a}} = \frac{p_{\text{K,e}}(m_N + m_K)}{2m_K} \tag{11}$$

Also gilt für die kinetische Energie des Neutrons am Anfang:

$$T_{\text{N,a}} = \frac{p_{\text{N,a}}^2}{2m_N} = \frac{p_{\text{K,e}}^2}{2m_N} \cdot \frac{(m_N + m_K)^2}{4m_K^2} = \frac{p_{\text{K,e}}^2}{2m_K} \cdot \frac{(m_N + m_K)^2}{4m_K m_N} = T_{\text{K,e}} \cdot \frac{(m_N + m_K)^2}{4m_K m_N} \tag{12}$$

Umformen nach $T_{\text{K,e}}$ liefert das richtige Ergebnis.

b) Das Neutron verliert beim elastischen Stoß genau so viel Energie, wie das Atomkern aufnimmt. Da das Atomkern anfangs keine kinetische Energie hatte gilt $\Delta T_{\mathrm{N}} = -T_{\mathrm{K,e}}$. Setzt man das Ergebnis aus der a) ein erhält man

$$\frac{\Delta T_{\mathrm{N}}}{T_{\mathrm{N,a}}} = \frac{-T_{\mathrm{K,e}}}{T_{\mathrm{N,a}}} = \frac{-4m_N m_K}{(m_N + m_K)^2} \tag{13}$$

$$\frac{-4m_N m_K}{(m_N + m_K)^2} \cdot \frac{1/m_K^2}{1/m_K^2} = \frac{-4(m_N/m_K)}{(1 + (m_N/m_K))^2} = \frac{-4\beta}{(1+\beta)^2} \tag{14}$$

mit $\beta = m_N/m_K$.

c) Ist $m_N << m_K$ geht der anteilige Energieverlust gegen Null - das heißt, dass das Neutron beim Stoß mit dem Atomkern reflektiert wird und nur sehr wenig Energie verliert.

d) Leitet man $\Delta T_{\mathrm{N}}/T_{\mathrm{N,a}}$ nach β ab und setzt diese gleich Null erhält man

$$\frac{(1+\beta)^2 \cdot -4 - (-4\beta) \cdot 2(1+\beta)}{(1+\beta)} = 0 \Rightarrow -4(1+\beta)^2 + 8\beta(1+\beta) = 0 \tag{15}$$

$$8\beta = 4(1+\beta) = 4 + 4\beta \Rightarrow 4\beta = 4 \Rightarrow \beta = m_N/m_K = 1 \tag{16}$$

Der größte Energieverlust passiert also, wenn die Masse des Kerns gleich die Masse des Neutrons ist (durch Einsetzen oben findet man sogar, dass die gesamte Energie zum Kern übertragen wird).

2 Scheinkräfte

2.1 Wolke

Eine Regenwolke zieht mit 36 km/h in 5 km Höhe auf 60 Grad nördlicher Breite nach Süden. Der Erdradius ist 6370 km.

a) Als Ursprung wird der Erdmittelpunkt gewählt. Wie sehen die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ der Wolke sowie der Vektor $\vec{\omega}$ der Erdrotation aus?

b) Welche Kraft und mit welcher Beschleunigung wird die Wolke in östlicher oder westlicher Richtung abgelenkt?

c) Um wie viel Grad hat sich die Bewegungsrichtung der Wolke nach zwei Stunden geändert? (Nehme an, dass sich die nördliche Breite nicht ändert und dass v in südlicher Richtung konstant bleibt.)

Lösung

a) Mit dem Koordinatensystem mit Ursprung im Zentrum, x-Richtung nach rechts, z-Richtung nach oben und y-Richtung in die Seite rein sind die Vektoren:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (R+h)\cos 60 \\ 0 \\ (R+h)\sin 60 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v\cos 30 \\ 0 \\ -v\sin 30 \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \tag{17}$$

ω berechnet man mit der Periode einer Erdrotation: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/86400$ rad/s

b) Die zwei zu betrachtenden Kräfte sind die Corioliskraft $F_C = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$ und Zentrifugalkraft $F_Z = -m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$. Mit den Vektoren von a):

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m\omega v \cos 30 \\ 0 \end{pmatrix}, F_Z = \begin{pmatrix} m\omega^2 (R+h) \sin 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die Zentrifugalkraft ist in der x-z-Ebene und lenkt nicht nach Osten oder Westen ab. Die Corioliskraft verursacht eine Beschleunigung in westlicher Richtung:

$$F = ma_C = 2m\omega v \cos 30 \Rightarrow a_C = 1.26 \cdot 10^{-3} \mathrm{m/s^2} \tag{19}$$

c) Bei konstanter Beschleunigung a_C ist die Geschwindigkeit in westlicher Richtung $v_C = a_C t = 9.07$ m/s. Aus dem rechteckigen Geschwindigkeitsdreieck ist die Geschwindigkeit der Wolke nach zwei Stunden bei einem Winkel $\alpha = \arctan(v_C/v) = 42.2°$.

3 Starre Körper

3.1 Trägheitsmoment

a) Berechnen Sie mit Integration das Volumen eines Kegels mit Höhe h von Boden zur Spitze und Radius R des Kreisbodens.

b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Kegels (mit Masse M) um seine Symmetrieachse.

LÖSUNG

a) Das Volumen ist definiert als $V = \iiint_V 1\mathrm{dV}$. Da ein Kegel Zylindersymmetrie hat, verwenden wir hier Zylinderkoordinaten - mit der Jacobideterminante ist $\mathrm{dV} = \mathrm{rdrd}\varphi\mathrm{dz}$.
φ geht von 0 bis 2π. r und z hängen voneinander ab, wir wählen also r von 0 bis R (der Minimal- und Maximalwert von r) und die Grenzen von z werden zu Funktionen von r. Die untere Grenze ist konstant 0 und die obere Grenze ist beim Kegel eine lineare Funktion (da die Kante gerade ist). Man setzt also $z(r) = a \cdot r + b$ für die obere Grenze an. Die obere Grenze von z bei $r = 0$ ist die gesamte Höhe des Kegels, also $z(0) = h = a \cdot 0 + b = b \Rightarrow b = h$. Bei $r = R$ ist die obere Grenze 0, also $z(R) = a \cdot R + h = 0 \Rightarrow a = -h/R$. z geht also von 0 bis $h - hr/R$.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{h-\frac{h}{R}r} r\mathrm{dzdrd}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R [rz]_0^{h-\frac{h}{R}r} \mathrm{dr} \tag{20}$$

$$= 2\pi \int_0^R hr - \frac{h}{R} r^2 \mathrm{dr} = 2\pi \left[\frac{1}{2}hr^2 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}r^3\right]_0^R = 2\pi h \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{\pi h R^2}{3} \tag{21}$$

b) Beim Trägheitsmoment integriert man nun über den Quadrat des Abstandes zur z-Achse, also r^2. Die Grenzen bleiben gleich.

$$I = \rho \iiint_V r^2 \mathrm{dr} = \frac{M}{V} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{h-\frac{h}{R}r} r^3 \mathrm{dzdrd}\varphi = \frac{M}{V} \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R \left[r^3 z\right]_0^{h-\frac{h}{R}r} \mathrm{dr} \tag{22}$$

$$= \frac{M}{V} 2\pi \cdot \int_0^R hr^3 - \frac{h}{R} r^4 \mathrm{dr} = \frac{M}{V} 2\pi \left[\frac{1}{4}hr^4 - \frac{1}{5}\frac{h}{R}r^5\right]_0^R \tag{23}$$

$$= 2\pi h \frac{3M}{\pi h R^2} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right) = \frac{3}{10} M R^2 \tag{24}$$

3.2 Kippender Stab

Ein dünner, homogener Stab der Masse m und Länge L steht senkrecht und kippt um, ohne am unteren Ende wegzurutschen.

a) Berechne mit Integration das Trägheitsmoment des Stabs bezüglich Drehung um das Stabende.
Hinweis: beim dünnen Stab ist die Masse zu einer Dimension beschränkt, also ist das Trägheitsmoment über einem eindimensionalen Integral definiert: $I = \rho \int z^2 \mathrm{d}z$

b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Stabes und die Momentangeschwindigkeit der oberen Stabendes beim Aufschlag auf dem Boden.

Nun wird eine punktförmige Zusatzmasse m irgendwo am Stab fest angebracht. Die Position s der Zusatzmasse wird durch den Abstand vom unteren Ende des Stabes beschrieben.

c) Welche Winkelgeschwindigkeit hat der Stab nun, welche Momentangeschwindigkeit die Stabspitze beim Aufschlag, in Abhängigkeit von s?

d) Gibt es Positionen der Zusatzmasse, so dass der Stab mit Zusatzmasse genau so aufschlägt wie ohne?

e) Schlägt der Stab mit Zusatzmasse gleich, schneller oder langsamer auf also ohne Zusatzmasse, wenn die Zusatzmasse am oberen Ende angebracht ist?

LÖSUNG

a) Man integriert über die Länge des Stabs, also $I = \frac{m}{L}\int_0^L z^2 \mathrm{dz} = \frac{1}{3}mL^2$

b) Energieansatz: potentielle Energie wird in Rotationsenergie umgewandelt. Man muss beachten, dass die potentiellen Energie mgh sich auf den Schwerpunkt des Stabs bezieht, also ändert sich h um $L/2$ während dem Fall.

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \tag{25}$$

Die Geschwindigkeit oben (Abstand L zur Drehachse) ist gegeben durch $v = \omega L = \sqrt{3gL}$.

c) Das Trägheitsmoment der Punktmasse ist ms^2, das Gesamtdrehmoment ist also $I = \frac{1}{3}mL^2 + ms^2$. Bei der potentiellen Energie hat man nun einen zusätzlichen Term mgs von der Punktmasse.

$$mg\frac{L}{2} + mgs = \frac{1}{2}J\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g(L+2s)}{\frac{1}{3}L^2 + s^2}} \tag{26}$$

d) Platziert man die Masse bei $s = 0$ ist $\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$ wie bei der b).

e) $s = L \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}$ - der Stab schlägt also schneller auf.

3.3 Drehteller

Abbildung 2 zeigt eine Anordnung zur Messung von Trägheitsmomenten. An einem Drehteller ist ein Zylinder mit Radius r befestigt, um den eine Schnur gewunden ist. Drehteller und Zylinder können sich reibungsfrei um die vertikale Achse drehen. Die Schnur verläuft über eine reibungsfreie, masselose Rolle zu einem aufgehängten Gewichtsstück der Masse m. Man lässt diese fallen und misst die Zeit t_1, bis das Gewichtsstück eine Strecke d zurückgelegt. Um das Trägheitsmoment eines Objektes zu messen stellt man diese auf den Drehtisch und misst die Zeit t_2, bis das Gewichtsstück die gleiche Strecke d zurückgelegt. Bei diesem Aufbau ist $r = 10$ cm, $m = 2.5$ kg und $d = 1.8$ m. Bei der Messung eines Körpers mit unbekanntem Drehmoment I ist $t_1 = 4.2$ s ohne Körper und $t_2 = 6.8$ s mit Körper auf dem Drehteller.

a) Berechnen Sie das Gesamtträgheitsmoment des Systems aus Drehteller und Zylinder.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Systems aus Drehteller, Zylinder und dem unbekannten Körper.

c) Berechnen Sie mit a) und b) das unbekannte Trägheitsmoment I.

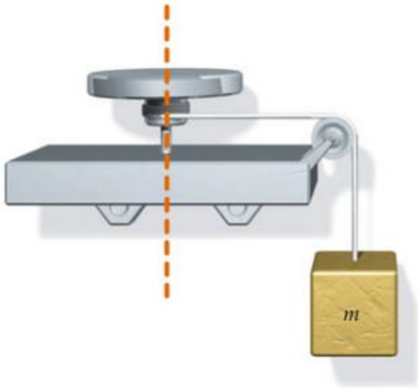

Abbildung 2: Aufbau bei Aufgabe 3.3

LÖSUNG

a) Auf die Rolle wirkt die Seilspannungskraft $\vec{F_S}$, die am Rand des Zylinders angreift (Abbildung 3). Da $\vec{r}$ und $\vec{F_S}$ senkrecht sind gilt für das Drehmoment $M = F_S r = I_0 \alpha = I_0 \frac{a}{r}$, wo I_0 das Gesamtträgheitsmoment ist und von der Rollbedingung $\alpha = a/r$ gilt.

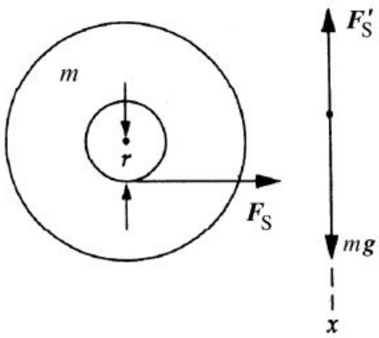

Abbildung 3: Kräftediagramm bei Aufgabe 3.3

Von dem Kräftegleichgewicht der fallenden Masse m gilt $ma = mg - F_S \Rightarrow T = m(g-a)$. Eingesetzt ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$I_0 = \frac{F_S r^2}{a} = \frac{m(g-a)r^2}{a} \tag{27}$$

Da das Gewichtstück keine Anfangsgeschwindigkeit hat ist die Distanz $d = \frac{1}{2}at_1^2$ aus der Beschleunigung gegeben. Durch Umformen nach a und einsetzten erhält man schließlich

$$a = \frac{2d}{t_1^2} \Rightarrow I_0 = \frac{m\left(g - \frac{2d}{t_1^2}\right)r^2}{\frac{2d}{t_1^2}} = 1.18\text{kgm}^2 \tag{28}$$

b) Man addiert nun das unbekannte Trägheitsmoment I zu I_0: $I_{ges} = I + I_0$. Für I_{ges} gilt die Formel 28 wie oben, mit t_2 statt t_1.

$$I_{ges} = \frac{m\left(g - \frac{2d}{t_2^2}\right) r^2}{\frac{2d}{t_2^2}} = 3.13\text{kgm}^2 \tag{29}$$

c) Das gesuchte Trägheitsmoment ist die Differenz der beiden gefundenen Trägheitsmomenten: $I = I_{ges} - I_0 = 1.95$ kg m^2.

3.4 Schlagzentrum

Ein gleichförmiger Stab der Länge l und Masse m ist an einem Ende reibungsfrei drehbar aufgehängt (Abbildung 4). Er wird von einer horizontalen Kraft in einer Entfernung x unterhalb der Aufhängung angestoßen.

a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts unmittelbar nach dem Stoß gegeben ist durch $v_0 = 3xF_0\Delta t/(2ml)$, wo F_0 die mittlere Kraft und Δt die Dauer der Krafteinwirkung ist.

b) Berechnen Sie die Horizontalkomponente der Kraft, die die Aufhängung auf den Stab ausübt. Für welches x verschwindet diese Kraft?
Hinweis: betrachte den linearen Impuls.

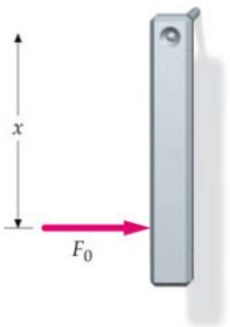

Abbildung 4: Aufbau bei Aufgabe 3.4

LÖSUNG

a) Nachdem die Kraft einwirkt hat der Stab eine Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse. Beim Schwerpunkt in der Mitte des Stabs gilt $v_0 = \omega r = \omega\frac{l}{2}$. Das Drehmoment, dass im Abstand x von der Drehachse angreift, ist $M = F_0 x = I\alpha = I\frac{\omega}{\Delta t}$, da man mit der konstanten mitteren Kraft arbeitet. Das Trägheitsmoment des Stabs bezüglich seinem Ende ist $I = \frac{1}{3}ml^2$ und somit ergibt sich für v_0

$$\omega = \frac{2v_0}{l} = \frac{F_0 x\Delta t}{\frac{1}{3}ml^2} \Rightarrow v_0 = \frac{3}{2}\frac{F_0 x\Delta t}{ml} \tag{30}$$

b) Wir bezeichnen den Impuls, der von der Aufhängung auf den Stab ausgeübt wird, mit Δp_a. Der insgesamt ausgeübte Kraftstoß ist $\Delta p_a + F_0 \Delta t$ und ist gleich der Impuls des Schwerpunktes mv_0. Damit gilt:

$$\Delta p_a = mv_0 - F_0 \Delta t = \frac{3F_0 x \Delta t}{2l} - F_0 \Delta t = F_0 \Delta t \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right) \tag{31}$$

Wegen $\Delta p_a = F_a \Delta t$ folgt

$$F_a = F_0 \left(\frac{3x}{2l} - 1 \right) \tag{32}$$

Setzt man diese gleich Null findet man, dass bei $x = \frac{2}{3}l$ diese Kraft verschwindet. Dieser Punkt heißt das Schlagzentrum des Stabes.