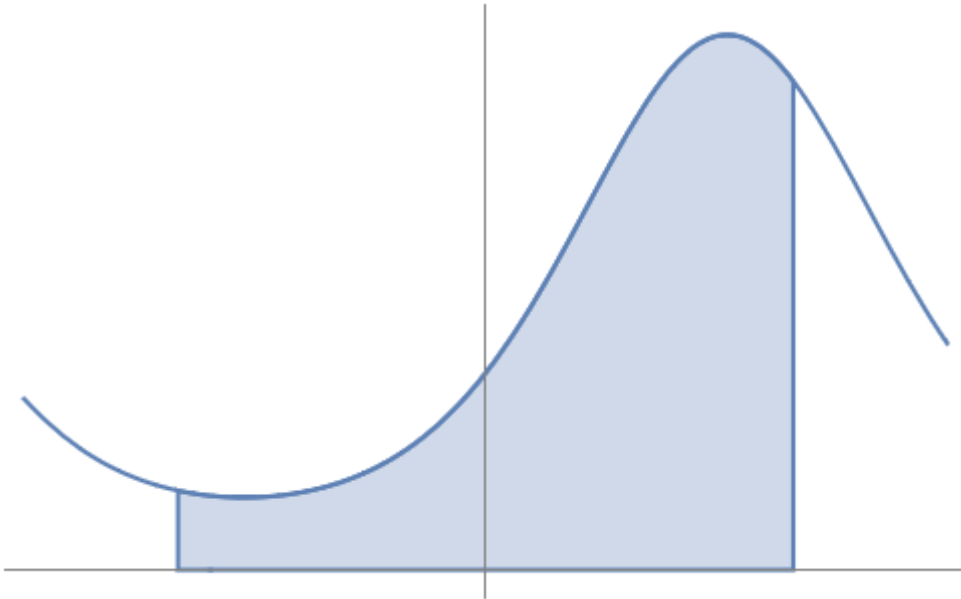


SKRIPTUM ZUM FERIENKURS

ANALYSIS 1 FÜR PHYSIK

MARIUS GRITL



Technische Universität München

Wintersemester 2021/2022

INHALTSVERZEICHNIS

1. GRUNDLAGEN	3
1.1. Aussagenlogik	3
1.2. Mengen und Quantoren	4
1.3. Supremum und Infimum	6
1.4. Beweise	7
1.5. Funktionen und Abbildungen	9
1.6. Komplexe Zahlen	10
1.7. Gruppen und Körper	12
2. FOLGEN	14
3. REIHEN	18
3.1. Konvergenzkriterien für Reihen	19
3.2. Potenzreihen	20
4. STETIGKEIT	22
5. DIFFERENZIERBARKEIT	26
5.1. Definition, Grundbegriffe und Rechenregeln	26
5.2. Anwendungen der Differentialrechnung	29
6. RIEMANN-INTEGRAL	34
6.1. Definition und Grundbegriffe	34
6.2. Integrationstechniken	36
6.3. Uneigentliche Integrale	39
7. FUNKTIONENFOLGEN	41
8. FOURIERREIHEN	43
9. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	47
9.1. Grundbegriffe und Reduktion der Ordnung	47
9.2. Operatornorm für Matrizen und Matrix-Exponentialfunktion	48
9.3. Lösung homogener Systeme	51
9.4. Inhomogene Systeme	52
A. WICHTIGE HINWEISE ZUM BEWEISEN UND RECHNEN BEI ÜBUNGS- AUFGABEN UND KLAUSUREN	53
B. AUSFÜHRLICHES BEISPIEL ZU EINEM ε -BEWEIS	55

1. GRUNDLAGEN

1.1. AUSSAGENLOGIK

Aussagen sind für die Formulierung mathematischer Konzepte von wesentlicher Bedeutung. Die gesamte Breite der Mathematik beschäftigt sich mit der Formulierung von Aussagen, und wie man andere Aussagen aus bekannten Aussagen folgern kann. Eine solche Folgerung bezeichnet man als einen *Beweis*. Auf Beweise gehen wir dann in Abschnitt 1.4 genauer ein.



DEFINITION 1.1 (AUSSAGE)

Eine **Aussage** ist ein Satz, welchem in eindeutiger Weise das Attribut „*wahr*“ oder „*falsch*“ zugeordnet werden kann.

BEISPIEL 1.2 (BEISPIELE & GEGENBEISPIELE FÜR AUSSAGEN)

- ▷ „*Elektronen haben Spin 1/2*“ ist eine wahre Aussage.
- ▷ „*4 ist eine Primzahl*“ ist augenscheinlich eine falsche Aussage.
- ▷ „*I won this election, by a lot!*“ ist für geistig gesunde Menschen offenbar falsch, für den 45. US-Präsidenten¹ jedoch nicht. ◊

BEMERKUNG 1.3

- ▷ Vorsicht ist geboten, wenn man es mit vagen Aussagen wie „*Analysis macht Spaß!*“ oder „*Franziskaner ist das beste Weißbier!*“ zu tun hat. Hier liegt die Entscheidung über den Wahrheitswert der Aussagen im Auge des Betrachters.
- ▷ Wir verwenden stets stillschweigend *tertium non datur*. D.h. eine Aussage ist *wahr* oder *falsch*. Weitere Wahrheitswerte lassen wir nicht zu. ◀

DEFINITION 1.4 (LOGISCHE VERKNÜPFUNGEN)

Seien A und B Aussagen. Dann definieren wir die ...

- ▷ **Implikation** $A \implies B$ („Wenn A , dann gilt auch B “),
- ▷ **Äquivalenz** $A \iff B$ („ A gilt genau dann, wenn B gilt“),
- ▷ **Adjunktion** $A \vee B$ („ A oder B gelten“),
- ▷ **Konjunktion** $A \wedge B$ („ A und B gelten“),
- ▷ **Negation** $\neg A$ („ A gilt nicht“).

BEMERKUNG 1.5 Streng genommen ist Definition 1.4 keine Definition im eigentlichen Sinne, da wir die dort aufgeführten logischen Verknüpfungen nicht axiomatisch definiert haben. Aus Zeitgründen werden wir dies auch nicht bis ins letzte Detail vertiefen können. Eine Möglichkeit, diese Verknüpfungen klar zu definieren ist jedoch die Wahrheitstafel. ◀

¹Donald J. Trump (*1946), US-amerikanischer Polit-Clown.

DEFINITION 1.6 (WAHRHEITSTAFEL)

Ein nützliches Hilfsmittel für aussagenlogische Beweise ist die **Wahrheitstafel**. Sie legt eindeutig fest, wie logische Verknüpfungen den Wahrheitsgehalt von Aussagen verändern.

A	B	$A \implies B$	$A \iff B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	f	f	w

BEMERKUNG 1.7

- ▷ Das logische “oder” ist dabei stets *einschließend* (auch *inklusive* genannt). D.h. die Adjunktion “ $A \vee B$ ” ist insbesondere auch dann wahr, wenn “ $A \wedge B$ ” wahr ist. Das ist wie in der Frage “Milch oder Zucker?”. Man kann sich für Milch oder Zucker oder eben beides entscheiden.
- ▷ Aus falschen Aussagen lässt sich immer etwas Wahres ableiten. So kann die falsche Aussage “ $0 = 1$ ” durch Multiplikation mit Null auf die wahre Aussage “ $0 = 0$ ” gebracht werden. Dahingegen lässt sich nie aus etwas Wahrem eine falsche Aussage folgern. Um von “ $0 = 0$ ” wieder zurück zu “ $0 = 1$ ” zu kommen, müssten wir die angewandte Operation umkehren. D.h., statt mit Null zu multiplizieren, wäre nun eine Division durch Null erforderlich, was auf \mathbb{R} keine wohldefinierte Operation ist. ◀

1.2. MENGEN UND QUANTOREN

Mengen spielen in der Mathematik die nahezu wichtigste Rolle. Sie sind die allgemeinsten Räume, auf welchen wir Operationen definieren können. Wir werden den Begriff der Menge und die daraus ableitbaren Konsequenzen jedoch nicht in der allgemeinstmöglichen Form einführen², sondern beschränken uns auf die auf Cantor³ zurückgehende Definition.



DEFINITION 1.8 (MENGE)

- ▷ Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen.

BEISPIEL 1.9

- $A := \{1, 2, 3, \text{Pommes}\}$
- $B := \{a, b, c, \dots, z\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

◊

- ▷ Ist M eine Menge, so schreiben wir “ $x \in M$ ”, wenn x in M enthalten ist. Sonst $x \notin M$.
- ▷ Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt **leere Menge** \emptyset .
- ▷ Die Menge aller Elemente aus M , für die eine Aussage A wahr ist, schreibt man als $\{x \in M : A \text{ ist für } x \text{ wahr}\}$.

BEISPIEL 1.10 Sei $M = \mathbb{N}$ und $A := “x \text{ gerade}”$. Dann schreiben wir das als die Menge $\{x \in \mathbb{N} : \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N} : x = 2m\}$. ◊

²Eine axiomatische Beschreibung dessen, was eine Menge ist, stellt die *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* dar.

³*Georg Cantor* (1845-1918), deutscher Mathematiker.

BEMERKUNG 1.11 Häufig schreiben wir "...", wenn klar ist, wie die Menge konstruiert wird. So schreibt man für die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} häufig $\{1, 2, 3, \dots\}$ und unterstellt dem Lesenden, dass er oder sie selbst versteht, was die nächsten Elemente der Menge sind. ◀

Um verschiedene Mengen zueinander in Relation zu setzen, benötigen wir *Quantoren*.

DEFINITION 1.12 (QUANTOREN)

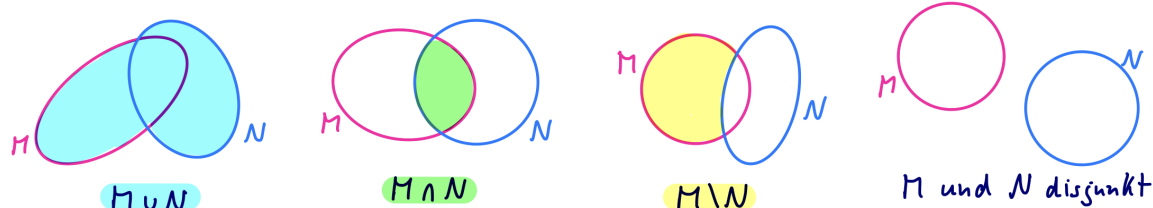
- ▷ Der **Existenzquantor** \exists besagt, dass es mindestens ein $x \in M$ gibt, sodass die Aussage $A(x)$ wahr ist. Wir schreiben dann " $\exists x \in M : A(x)$ ". Möchte man kennzeichnen, dass die Aussage $A(x)$ für genau ein $x \in M$ wahr ist, so schreiben wir " $\exists! x \in M : A(x)$ ".
- ▷ Der **Allquantor** \forall kennzeichnet, dass eine Aussage $A(x)$ für alle $x \in M$ wahr ist. Wir schreiben dann " $\forall x \in M : A(x)$ ".

DEFINITION 1.13 (TEILMENGEN & VERKNÜPFUNG VON MENGEN)

Seien M, N beliebige Mengen.

- ▷ M ist eine **Teilmenge** von N , genau dann wenn $\{\forall x \in M : x \in N\}$. Wir schreiben dann " $M \subseteq N$ ".
- ▷ M ist eine **echte Teilmenge** von N , genau dann wenn $\{\exists y \in N : y \notin M\}$. Wir schreiben dann " $M \subsetneq N$ ".
- ▷ M und N sind **gleich**, genau dann wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$. Wir schreiben dann " $M = N$ ".
- ▷ Wir definieren die **Vereinigung** von M und N als $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$.
- ▷ Wir definieren den **Durchschnitt** von M und N als $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$.
- ▷ Wir definieren die **Differenz** von M und N als $M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$.
- ▷ Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennen wir M und N **disjunkt**.

Dies lässt sich mit *Venn-Diagrammen* veranschaulichen, in welchen wir uns die Mengen M und N als zweidimensionale Flächen vorstellen:



DEFINITION 1.14 (KARTESISCHES PRODUKT)

Seien M und N Mengen. Dann heißt die Menge aller *geordneten Paare* (auch *Tupel* genannt⁴) (x, y) mit $x \in M, y \in N$, also $M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ das **kartesische Produkt** von M und N .

BEISPIEL 1.15 (\mathbb{R}^n ALS KARTESISCHES PRODUKT)

Den \mathbb{R}^n fassen wir als das n -fache kartesische Produkt der Menge \mathbb{R} mit sich selbst auf, d.h.

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}. \quad \diamond$$

⁴ Anders als bei Mengen kommt es bei Tupeln sehr wohl auf die Reihenfolge an. So gilt bspw. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, jedoch nicht $(1, 2) = (2, 1)$.

DEFINITION 1.16 (GEORDNETE MENGE)

Eine Menge M heißt **geordnet**, wenn es eine Relation $<$ gibt, so dass gilt:

- ▷ Für $x, y \in M$ gilt genau eine der Aussagen $x < y, x = y, y < x$. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als *Trichotomie*.
- ▷ Des Weiteren gilt die *Transitivität*, d.h. sind $x, y, z \in M$, so gilt $(x < y) \wedge (y < z) \implies x < z$.

Geordnete Mengen spielen für die Praxis eine wesentliche Rolle. Nur mit ihnen lassen sich Ungleichungen sinnvoll definieren.

1.3. SUPREMUM UND INFIMUM

Wir führen nun, aufbauend auf dem eben eingeführten Konzept der *geordneten Menge*, die Begriffe des *Supremums* und *Infimums* ein. Diese lassen sich nur auf Mengen mit Ordnungsstruktur sinnvoll definieren.



DEFINITION 1.17 (SUPREMUM & INFIMUM)

Sei A eine Teilmenge einer geordneten Menge M .

- ▷ A heißt **nach oben (unten) beschränkt**, genau dann wenn

$$\exists s \in M \forall x \in A : x \leq (\geq) s.$$

- ▷ Das $s \in M$, welches nicht notwendigerweise in A enthalten sein muss, heißt dann **obere (untere) Schranke** von A .
- ▷ Das $s \in M$ heißt **Supremum (Infimum)** (kleinste obere (größte untere) Schranke) von A , genau dann wenn s eine obere (untere) Schranke von A ist und jedes $z \in M$ mit $z < (>)s$ keine obere (untere) Schranke von A ist. Wir schreiben dann $s = \sup A$, bzw. $s = \inf A$.
- ▷ Gilt für das Supremum (Infimum), dass $s \in A$ ist, so nennen wir s ein **Maximum (Minimum)** und wir schreiben $s = \max A$, bzw. $s = \min A$.

Mit den Begriffen des Supremums bzw. Infimums können wir eine wichtige Eigenschaft bestimmter Mengen herausarbeiten, nämlich die *Supremums-Eigenschaft*.

DEFINITION 1.18 (SUPREMUMS-EIGENSCHAFT & VOLLSTÄNDIGKEIT)

Eine geordnete Menge M besitzt die **Supremums-Eigenschaft**, wenn für beliebige, nichtleere und nach oben beschränkte Teilmengen $A \subseteq M$ das Supremum $\sup A$ in M existiert. In diesem Fall nennen wir M **vollständig**.

BEISPIEL 1.19 (\mathbb{Q} ALS NICHT VOLLSTÄNDIGE MENGE)

Sei $M := \mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die Menge der rationalen Zahlen und die Teilmenge $A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. A ist offenbar beschränkt, jedoch besitzt A kein Supremum in \mathbb{Q} , da der einzige Kandidat für das Supremum, $\sqrt{2}$, nicht in \mathbb{Q} enthalten ist. Des Weiteren gibt es auch kein kleinstes $s \in \mathbb{Q}$, so dass $s > \sqrt{2}$. \mathbb{Q} besitzt damit nicht die Supremumseigenschaft und ist somit nicht vollständig.

Im Gegensatz zu \mathbb{Q} existiert das Supremum aber in \mathbb{R} . Dies liefert einen Hinweis auf die Vollständigkeit von \mathbb{R} . Der konkrete Beweis greift auf die Konstruktion von \mathbb{R} als Erweiterungskörper von \mathbb{Q} zurück und wird hier nicht weiter behandelt. \diamond

1.4. BEWEISE

Wir setzen uns nun mit einem der wichtigsten Konzepte der Mathematik, nämlich dem Beweis auseinander. Der wesentliche Unterschied zwischen Mathematik und anderen Disziplinen ist genau die Tatsache, dass in der Mathematik durch logisches Schlussfolgern aus vorausgesetzten Aussagen neue Aussagen geschlossen werden. Dies geschieht durch reine mathematische Argumentation. In der Physik hingegen lassen sich physikalische Theorien *nicht* beweisen. Sie werden dort solange als gültig erachtet, bis ein Experiment sie widerlegt.



Die Struktur ist dabei stets vorgegeben. In einer *Definition* werden neue Begriffe eingeführt und klar festgelegt, was wir unter ihnen verstehen und welche Eigenschaften sie haben. Eine Definition lässt sich nicht beweisen. Beispielsweise definieren wir die leere Menge eindeutig dadurch, dass sie die einzige Menge ohne Elemente ist. Das ist ein Fakt, und kann nicht bewiesen werden. Mathematische *Sätze* hingegen müssen stets bewiesen werden. In ihnen werden Dinge behauptet, welche dann anhand der Definition bewiesen werden müssen. Das ist mitunter ziemlich aufwendig und kann ausgesprochen schwierig werden. Wichtig hierbei ist, dass man stets nah an den Begriffen der Definition bleibt, oder schon bewiesene Aussagen in seinem Beweis verwendet. Es passiert immer wieder, dass die zu zeigende Aussage im Beweis zwischendurch als wahr angenommen wird, was den Beweis wertlos macht.

Das Auffinden der Beweisidee ist meist das größte Problem. Dabei hilft es häufig, sich ein Bild von der zu beweisenden Aussage zu machen und sich so einen Überblick zu verschaffen, was vorausgesetzt ist und was eigentlich gezeigt werden soll. Sowohl Skizzen, als auch unbegründete Rechnungen können dabei sehr hilfreich sein, dürfen den Beweis jedoch *nicht* ersetzen. Sie sollen nur das Auffinden der Beweisidee erleichtern.

BEMERKUNG 1.20 Mathematische Sätze sind häufig Implikationen, d.h. von der Form $A \implies B$. Falls die **Voraussetzung** A erfüllt ist, gilt die **Folgerung** B . Wenn $A \implies B$ wahr ist, nennt man A eine **hinreichende** Bedingung für B und B eine **notwendige** Bedingung für A . ◀

BEISPIEL 1.21 (HINREICHENDE & NOTWENDIGE BEDINGUNG)

Wir setzen die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit aus den Kapiteln 4 und 5 für einen Moment voraus. Es gilt stets, dass Differenzierbarkeit einer Funktion schon die Stetigkeit garantiert, also “Differenzierbarkeit \implies Stetigkeit”. Wir nennen also Differenzierbarkeit eine hinreichende Bedingung für Stetigkeit. Möchten wir zeigen, dass eine Funktion stetig ist, genügt es also, ihre Differenzierbarkeit zu zeigen. Hingegen ist Stetigkeit notwendig für Differenzierbarkeit. Eine unstetige Funktion kann also nicht differenzierbar sein. ◊

Wir erarbeiten uns nun einige Beweistechniken.

- ▷ **Direkter Beweis** von $A \implies B$: Wir finden eine Kette von wahren Implikationen $A \implies A' \implies \dots \implies B$. Das zeigt dann wegen der Transitivität der Implikation automatisch $A \implies B$.

BEISPIEL 1.22 Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, dann ist auch ihr Quadrat, n^2 , gerade. ◊

Beweis. Ist n gerade, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2m$. Damit folgt durch Quadratur

$$n \text{ gerade} \implies \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m \implies \exists m \in \mathbb{N} : n^2 = (2m)^2 = 2(2m^2).$$

n^2 ist also auch das Doppelte der natürlichen Zahl $2m^2$ und damit selbst wieder gerade. ◻

- ▷ **Kontraposition:** Wir zeigen statt $A \implies B$ die Implikation $\neg B \implies \neg A$, das zeigt dann $A \implies B$. Die Äquivalenz $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ kann man mit einer Wahrheitstafel beweisen.

- ▷ **Beweis durch Widerspruch/Indirekter Beweis:** Wir möchten zeigen, dass eine Aussage A wahr ist. Dazu nehmen wir zunächst an, dass sie falsch ist, d.h. $\neg A$ ist wahr und leiten daraus einen Widerspruch her. Wir folgern nämlich aus $\neg A$ gleichzeitig eine weitere Aussage B sowie ihre logische Verneinung $\neg B$, also formal $\neg A \implies (B \wedge \neg B)$. Das ist ein Widerspruch, da $B \wedge \neg B$ gleichzeitig wahr und falsch ist. Damit haben wir $(\neg A \implies (B \wedge \neg B)) \implies A$, was die Aussage A beweist.
- ▷ **Vollständige Induktion:** Eine Aussage, welche wir als Induktionsvoraussetzung bezeichnen, ist für jede natürliche Zahl n gültig, wenn sie zum einen für einen Startwert, z.B. $n = 1$ gültig ist. Dies bezeichnen wir als den Induktionsanfang. Zum anderen muss aus der angenommenen Korrektheit der Aussage für ein beliebiges n die Korrektheit für ihren Nachfolger $n + 1$ geschlossen werden können; dies ist der Induktionsschritt.

BEMERKUNG 1.23 Der Induktionsanfang muss jedoch nicht immer $n = 1$ sein. So gilt die Aussage " $n! > 2^n$ " erst für $n \geq 4$. ◀

BEISPIEL 1.24 Wir zeigen exemplarisch die "Gaußsche⁵ Summenformel":

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \diamond$$

Beweis. Die zu zeigende Formel ist die Induktionsvoraussetzung (I.V.). Wir werden sie im Beweis verwenden *müssen*.

- Der Induktionsanfang " $n = 1$ ",

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

ist offensichtlich erfüllt.

- Für den Induktionsschritt " $n \rightarrow n + 1$ " erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \dots = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Damit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. ◻

BEMERKUNG 1.25

- ▷ Ist ein **Äquivalenzbeweis** zu führen, d.h. " $A \iff B$ " muss gezeigt werden, so müssen zwei separate Beweise geführt werden. Sowohl die Implikation " $A \implies B$ " als auch " $B \implies A$ " muss bewiesen werden.
- ▷ Durch Induktion kann der wichtige **Binomialsatz**⁶

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

bewiesen werden. Hierbei ist $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der **Binomialkoeffizient**. ◀

⁵ Carl Friedrich Gauß (1777-1855), deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker.

⁶ Alessandro Binomi (1727-1643), japanischer Ornithologe.

1.5. FUNKTIONEN UND ABBILDUNGEN

Bisher haben wir uns nur mit Mengen und darauf definierbaren Operationen und Relationen auseinandergesetzt. Nun beschäftigen wir uns damit, wie wir von einer gegebenen Menge in eine zweite Menge abbilden können. Das führt auf den Begriff der *Funktion*. Den Funktionsbegriff werden wir in der ganzen weiteren Analysis brauchen.



DEFINITION 1.26 (FUNKTIONEN & IHRE EIGENSCHAFTEN)

Seien A und B beliebige Mengen.

- ▷ Wenn jedem $x \in A$ ein $y \in B$ zugeordnet wird, welches mit $f(x)$ bezeichnet wird, so ist f eine **Funktion** oder **Abbildung** von A nach B .
Wir schreiben dann $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$.
- ▷ $y := f(x)$ ist der **Bildwert** von x unter f , x der **Urbildwert** von y unter f .
- ▷ Die Menge A nennt man den **Definitionsbereich** von f und B den **Wertebereich**.

Häufig wünscht man sich, dass eine vorliegende Abbildung gewisse Eigenschaften hat. Darunter fallen die Begriffe der *Surjektivität*, *Injektivität* und *Bijektivität*. Vor allem die Bijektivität einer Abbildung ist eine schöne Sache, da sie die Abbildung invertierbar macht.

DEFINITION 1.27 (SURJEKTIVITÄT, INJEKTIVITÄT & BIJEKTIVITÄT)

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ heißt ...

- ▷ **surjektiv**, genau dann wenn $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$,
- ▷ **injektiv**, genau dann wenn $\forall x, \tilde{x} \in A : x \neq \tilde{x} \implies f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- ▷ **bijektiv**, genau dann wenn sie surjektiv und injektiv ist.

BEMERKUNG 1.28

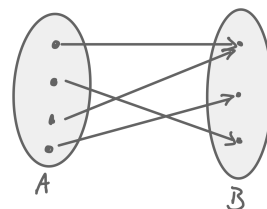
- ▷ Um Injektivität zu beweisen ist es oft leichter, die Kontraposition zu zeigen. D.h. wenn $f(x) = f(\tilde{x})$ gilt, müssen x und \tilde{x} übereinstimmen.

BEISPIEL 1.29 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv. ◇

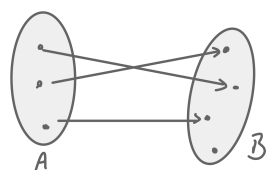
Beweis. Seien $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $f(x) = f(\tilde{x}) \iff x^2 = \tilde{x}^2$. Daraus folgt jedoch im Allgemeinen nicht, dass auch $x = \tilde{x}$. Man wähle z.B. $x = -\tilde{x} = 1$. □

- ▷ Wir können uns die drei Begriffe auch graphisch vorstellen:

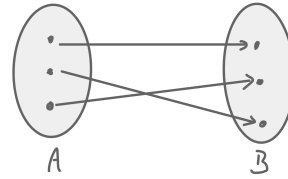
- Für die Surjektivität muss jeder Urbildwert auf mindestens einen Bildwert abgebildet werden.



- Bei injektiven Abbildungen darf jedem Bildwert maximal ein Urbildwert zugeordnet sein.



- Für Bijektivität ist es notwendig, dass jedem Urbildwert eindeutig und genau ein Bildwert zugeordnet wird.



- Wenn für alle $y \in B$ gilt, dass $f^{-1}(\{y\})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{mindestens} \\ \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{array} \right\}$ ein $x \in A$ enthält,

$$\text{dann ist } f \left\{ \begin{array}{l} \text{surjektiv} \\ \text{injektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\}.$$

1.6. KOMPLEXE ZAHLEN

Wir definieren uns nun eine besonders wichtige und auch nützliche Menge, nämlich die Menge der *komplexen Zahlen*. Diese ist sowohl für die Analysis, Algebra und Geometrie, als auch für viele Anwendungen u.a. in der Physik und Elektrotechnik von besonders großer Relevanz. Zum einen ermöglicht sie Dinge, die mit den reellen Zahlen so nicht möglich sind. Zum anderen vereinfachen sich viele Rechnungen, wenn man ins Komplexe übergeht.



DEFINITION 1.30 (KOMPLEXE ZAHLEN)

- ▷ Die **imaginäre Einheit** i ist definiert über $i^2 = -1$.
- ▷ Damit definieren wir die **Menge der komplexen Zahlen** \mathbb{C} als

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- ▷ Für $z = x + iy$ heißt
 - $\text{Re}(z) := x$ der **Realteil**,
 - $\text{Im}(z) := y$ der **Imaginärteil**,
 - $\bar{z} := x - iy$ die **komplexe Konjugation** und
 - $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ der **Betrag** der komplexen Zahl z .

BEMERKUNG 1.31 Sowohl Real-, also auch Imaginärteil einer komplexen Zahl sind selbst wieder reell! Der Imaginärteil von $z = x + iy$ ist $y \in \mathbb{R}$ und nicht $iy \in \mathbb{C}$.

SATZ 1.32 (RECHENREGELN FÜR KOMPLEXE ZAHLEN)

Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:

- | | | |
|--|-----------------------------------|-------------------------------|
| ▷ $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$, | ▷ $ w + z \leq w + z $, | ▷ $ z ^2 = z\bar{z}$, |
| ▷ $\overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$, | ▷ $ w - z \leq w - z $, | ▷ $ \bar{z} = z $, |
| ▷ $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, | ▷ $ w \cdot z = w \cdot z $, | ▷ $ \text{Re}(z) \leq z $, |
| ▷ $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, | ▷ $\bar{\bar{z}} = z$, | ▷ $ \text{Im}(z) \leq z $, |

$$\triangleright |z| = 0 \iff z = 0, \quad \triangleright \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ für } z \neq 0, \quad \triangleright \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ für } z \neq 0.$$

Der folgende Satz garantiert, dass ein auf \mathbb{C} definiertes, nichtkonstantes Polynom mindestens eine Nullstelle besitzt.

SATZ 1.33 (FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA)

Jedes Polynom $f(z) := \sum_{k=0}^n c_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}^{n+1}, c_n \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle, d.h.

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0.$$

Beweis. Analysis 3 □

Daraus lässt sich mithilfe der vollständigen Induktion ein nützliches Korollar folgern.

KOROLLAR 1.34 (LINEARFAKTORZERLEGUNG FÜR POLYNOME)

Jedes Polynom $f(z) := \sum_{k=0}^n c_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}^{n+1}, c_n \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Darstellung

$$f(z) = c_n \prod_{k=0}^n (z - z_k).$$

Beweis. Wir beweisen das Korollar mittels vollständiger Induktion über den Grad von f .

Induktionsanfang ($n = 1$): $f(z) = c_1 z + c_0 = \tilde{c}(z - z_1)$ mit $\tilde{c} = c_1 \neq 0$ und $z_1 = -\frac{c_0}{c_1}$.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$): Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt f eine Nullstelle z_{n+1} , so dass $f(z) = (z - z_{n+1})g(z)$ mit g vom Grad n .

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es c_n, z_1, \dots, z_n , so dass $g(z) = c_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$.

Somit ist $f(z) = c_n(z - z_1) \dots (z - z_n)(z - z_{n+1})$. Bis auf Umnummerierung der Nullstellen ist diese Darstellung sogar eindeutig. □

BEMERKUNG 1.35 Korollar 1.34 besagt, dass ein komplexes Polynom vom Grad n auch n nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen besitzt. Das funktioniert auch nur über \mathbb{C} und nicht über \mathbb{R} ; so ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ ein Polynom vom Grad 2 und besitzt keine einzige Nullstelle. Auf \mathbb{C} besitzt das Polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + 1$ hingegen die Linearfaktorzerlegung $f(z) = (z - i)(z + i)$. Wir bezeichnen \mathbb{C} (im Gegensatz zu \mathbb{R}) als *algebraisch abgeschlossen*, da jedes Polynom über \mathbb{C} eine Linearfaktorzerlegung besitzt. ◀

Nun interessieren wir uns für die graphische Darstellung von komplexen Zahlen. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Damit lässt sich \mathbb{C} als zweidimensionaler reeller Vektorraum auffassen. Dies erlaubt es uns, komplexe Zahlen in der *komplexen Zahlenebene* darzustellen. Für konkrete Zeichnungen sei an dieser Stelle auf das diesem Abschnitt zugehörige Lehrvideo verwiesen.

DEFINITION 1.36 (KARTESISCHE DARSTELLUNG \leftrightarrow POLARDARSTELLUNG)

Die Darstellung in kartesischen Koordinaten $z = x + iy$ bezeichnen wir als die **kartesische Darstellung**. Alternativ bietet sich die **Polardarstellung** $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ an.

BEMERKUNG 1.37 Es gilt dabei stets $r = |z|$ und sofern $x > 0$ ist, gilt $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$. Für $x < 0$ müssen andere Darstellungen, z.B. mit dem Arcuscossinus gewählt werden. Darauf wird hier nicht näher eingegangen. ◀

SATZ 1.38 (EULER⁷-IDENTITÄT)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Beweis. Später mit Hilfe von Potenzreihen. □

Sowohl \mathbb{R} als auch \mathbb{C} können mit einer Addition und einer Multiplikation versehen werden. Die zustande kommende algebraische Struktur ist dann assoziativ, kommutativ und distributiv. Da die Addition und die Multiplikation jeweils neutrale und inverse Elemente besitzen, haben wir es also mit einem *Körper* zu tun.

1.7. GRUPPEN UND KÖRPER

Wir wenden uns noch der Theorie der *Gruppen* und *Körper* zu. Wir werden dabei nur die wichtigsten Definitionen und daraus folgenden Resultate anreißen und uns auf einfache Beispiele beschränken, ohne auf die Beweise näher einzugehen. Es wird zu diesem Kapitel keine Übungsaufgaben geben, es ist jedoch nicht absolut ausgeschlossen, dass Inhalte hierzu in einer Klausur abgeprüft werden. Zudem ist es für Interessierte der theoretischen Physik äußerst empfehlenswert, sich mit Gruppentheorie auseinanderzusetzen. Das uns heute bekannte *Standardmodell* zur Beschreibung von Elementarteilchen der beobachtbaren Welt baut stark auf gruppentheoretischen Überlegungen auf.



DEFINITION 1.39 (GRUPPE)

- ▷ Eine **Gruppe** ist ein Paar (G, γ) aus einer Menge G und einer Abbildung $\gamma : G \times G \rightarrow G$, notiert als $\gamma(a, b) = ab$, so dass folgende *Gruppenaxiome* erfüllt sind:
 - (i) **Assoziativität:** $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$,
 - (ii) Existenz eines **neutralen Elements:** $\exists e \in G \forall a \in G : ae = a$,
 - (iii) Existenz von **Inversen:** $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = e$.
- ▷ Eine Gruppe heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn $\forall a, b \in G : ab = ba$.
- ▷ Eine Gruppe heißt **endlich**, wenn $|G| < \infty$.

BEMERKUNG 1.40

- ▷ Üblicherweise schreiben wir meist “die Gruppe G ” und meinen “die Gruppe (G, γ) ”.
- ▷ Endliche Gruppen sind *vollständig klassifiziert*. Ohne näher verstehen zu müssen was das bedeutet, ist dies mathemathikhistorisch äußerst interessant. Der Beweis dieser Aussage beschäftigte die Mathematik des 20. Jahrhunderts wesentlich und konnte schließlich 2002 auf mehr als 10000 Seiten vollendet werden. ◀

SATZ 1.41 (EIGENSCHAFTEN VON GRUPPEN)

Sei (G, γ) eine Gruppe, dann gilt:

- ▷ Es existiert genau ein neutrales Element,
- ▷ $\forall a \in G : ae = ea = a$,
- ▷ Für jedes $a \in G$ existiert genau ein Inverses $a^{-1} \in G$,
- ▷ $\forall a \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e$,
- ▷ Für alle $a, b \in G$ besitzt die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x \in G$, nämlich $x = a^{-1}b$.

⁷Leonhard Euler (1707-1783), Schweizer Mathematiker, Physiker und Astronom.

BEISPIEL 1.42 (BEISPIELE FÜR GRUPPEN)

- ▷ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine unendliche, abelsche Gruppe. Hier ist $\gamma(a, b) = a + b$, $e = 0$ und das Inverse ist $(-a)$.
- ▷ Die Permutationsgruppe $S_n := \{\text{Permutation von } n \text{ Elementen}\}$ ist endlich, jedoch für $n \geq 3$ nicht abelsch.
- ▷ Gruppen tauchen auch in der theoretischen Physik auf. Die *Lorentzgruppe*⁸ der speziellen Relativitätstheorie ist gegeben durch $\{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : A\eta A^T = \eta\}$. Hierbei ist $\eta := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ der *Minkowski*⁹-Tensor. ◇

DEFINITION 1.43 (KÖRPER)

- ▷ Ein **Körper** ist ein Tripel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ einer Menge \mathbb{K} und zweier Abbildungen $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, so dass gilt:
 - (i) $(\mathbb{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
 - (ii) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe,
 - (iii) **Distributivgesetz**: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a + b)c = ac + bc$.
 - ▷ Auf $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist eine **Ordnung** gegeben, wenn $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:
 - (i) $a < b \implies a + c < b + c$,
 - (ii) $0 < a \wedge 0 < b \implies 0 < ab$.
- Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ dann einen **angeordneten Körper**.

BEISPIEL 1.44 (BEISPIELE & GEGENBEISPIELE FÜR KÖRPER)

- ▷ \mathbb{Q} und \mathbb{R} mit der bekannten Addition und Multiplikation bilden jeweils geordnete Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- ▷ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist zwar ein Körper, aber nicht angeordnet.
- ▷ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine abelsche Gruppe ist. Nicht jedes Element aus \mathbb{Z} besitzt ein in \mathbb{Z} liegendes multiplikatives Inverses. ◇

⁸ Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), niederländischer theoretischer Physiker.

⁹ Hermann Minkowski (1864-1909), russisch-deutscher Mathematiker und Physiker.

2. FOLGEN

Das Konzept der Folge ist für die Analysis von besonderer Bedeutung. Was zunächst nur als Aneinanderreihung von Zahlen scheinen mag, taucht tatsächlich in vielen, mitunter deutlich abstrakteren Definitionen wieder auf. In Kapitel 4 führen wir das Konzept der Stetigkeit reeller Funktionen ein und auch der Stetigkeitsbegriff baut auf dem Begriff der Folge auf. Der Begriff des Grenzwerts und damit auch die Definition der Ableitung in Kapitel 5 und des Riemann-Integrals in Kapitel 6 erfordern einen Folgenbegriff. Wir beschränken uns hier in der Regel auf reelle Folgen. Alle Resultate übertragen sich ins Komplexe, indem die gewonnenen Erkenntnisse separat auf Real- und Imaginärteil angewendet werden.



DEFINITION 2.1 (FOLGE)

Unter einer **Folge reeller Zahlen** verstehen wir eine Abbildung von \mathbb{N} nach \mathbb{R} mit $n \mapsto a_n$. Wir schreiben dann für die Folge kurz auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und bezeichnen a_n als das n -te Folgenglied.

BEISPIEL 2.2 (WICHTIGE FOLGEN)

- ▷ Konstante Folge mit $a_n = a$ wobei $a \in \mathbb{R}$.
- ▷ Folge der geraden Zahlen $a_n = 2n$.
- ▷ Alternierende Folge $a_n = (-1)^n$.
- ▷ Exponentialfolge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. ◊

DEFINITION 2.3 (GRENZWERT EINER FOLGE)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ der **Grenzwert** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ”.

BEMERKUNG 2.4

- ▷ Wenn der Grenzwert existiert, heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergent**, sonst **divergent**.
- ▷ N wird im Allgemeinen von ε abhängen. Je kleiner ε ist, desto größer wird das N gewählt werden müssen.
- ▷ Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**. ◀

BEISPIEL 2.5 $a_n := \frac{1}{n}$ ist konvergent mit Grenzwert 0. ◊

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen dazu passend ein $N > \frac{1}{\varepsilon}$, so dass

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

Definition 2.3 ist für *genau eine* Situation nützlich. Haben wir eine Folge und ihren vermuteten Grenzwert gegeben, so können wir mit ihr “nachrechnen”, dass der vermutete Grenzwert auch der tatsächliche Grenzwert ist, indem wir für beliebige $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass der Abstand vom n -ten Folgenglied a_n zum Grenzwert a für alle $n \geq N$ kleiner als ε ist. Das Problem hierbei ist, dass wir eben eine Vermutung über den möglichen Grenzwert im Vorfeld benötigen und erst dann zeigen können, dass dies der wirkliche Grenzwert ist. Durch Abänderung des gewöhnlichen Konvergenzbegriffes können wir dieses Problem beseitigen. Wir verschärfen nämlich den eben definierten Konvergenzbegriff durch den der *Cauchy-Folge*.

DEFINITION 2.6 (CAUCHY¹⁰-FOLGE)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

BEMERKUNG 2.7 Es genügt nicht, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder, $|a_n - a_{n-1}|$ beliebig klein wird, sondern die Differenz $|a_m - a_n|$ muss für alle voneinander unabhängigen $m, m \geq N$ kleiner als ε sein. ◀

BEISPIEL 2.8 $a_i := \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}$, ist eine Cauchy-Folge. ◇

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen nun ein $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Zudem seien $m, n \geq N$ beliebig und o.B.d.A.¹¹ $n \geq m$. Dann ist

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{n - m}{mn} \right| \leq \frac{n - m}{mn} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

Wir betrachten nun eine wichtige Aussage, nämlich das *Cauchy-Konvergenzkriterium*.

SATZ 2.9 (CAUCHY-KONVERGENZKRITERIUM)

Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert die vorliegende Folge, nennen wir sie a_n . Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) - (a_n - a)| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

BEMERKUNG 2.10 Satz 2.9 besagt also, dass eine konvergente Folge immer eine Cauchy-Folge ist. Die Rückrichtung wird im Allgemeinen nicht erfüllt sein und hängt von der Menge ab, in welche die betrachtete Folge abbildet. In \mathbb{R} konvergiert jede Cauchy-Folge. Dies gilt auch für komplexe Folgen, jedoch bspw. nicht für auf \mathbb{Q} definierte Folgen. Im Allgemeinen gilt für nach vollständigen Mengen abbildende Folgen, dass die Begriffe der gewöhnlichen Konvergenz und der Cauchy-Folge äquivalent sind. Gelegentlich wird eine Menge auch als vollständig definiert, wenn jede Cauchy-Folge mit Folgengliedern in der Menge konvergiert.

Wir wenden uns nun weiteren, für Folgen relevanten, Begriffen zu. Wir führen unter anderem das Konzept der *Beschränktheit* einer Folge ein und erklären, was wir unter der *Monotonie* einer Folge verstehen. Das erlaubt uns dann die Begriffe der *Teilfolge* und des *Häufungspunktes* zu definieren.

**DEFINITION 2.11 (BESCHRÄNKTHEIT VON FOLGEN)**

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **beschränkt**, wenn

$$\exists M \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M.$$

SATZ 2.12 (KONVERGENZ \Rightarrow BESCHRÄNKTHEIT)

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

¹⁰ *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857), französischer Mathematiker.

¹¹ "ohne Beschränkung der Allgemeinheit"

Beweis. Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon, \text{ d.h. } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, a - \varepsilon\} < a_n < \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, a + \varepsilon\}.$$

Anschaulich gesprochen: Alle Folgenglieder mit $n < N \in \mathbb{N}$ müssen nicht zwingenderweise in einer ε -Umgebung um a liegen. Alle weiteren Folgenglieder ($n \geq N$) liegen aufgrund der Konvergenz in besagter ε -Umgebung. Vereinigt man die endliche Menge $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ mit $\{a - \varepsilon\}$ bzw. $\{a + \varepsilon\}$, so sind Minimum bzw. Maximum auf diesen Mengen wohldefiniert. \square

BEMERKUNG 2.13 Die Umkehrung, d.h. aus Beschränktheit folgt Konvergenz, gilt im Allgemeinen nicht. Als Gegenbeispiel wähle man $a_n = (-1)^n$. \blacktriangleleft

DEFINITION 2.14 (MONOTONIE VON FOLGEN)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt:

- ▷ **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- ▷ **streng monoton wachsend**, falls $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- ▷ **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- ▷ **streng monoton fallend**, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 2.15 (TEILFOLGE & HÄUFUNGSPUNKT)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

- ▷ Ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge mit Werten in \mathbb{N} , so nennt man $(a_k)_{n_k \in \mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ▷ $a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, welche gegen a konvergiert.

BEISPIEL 2.16 (TEILFOLGEN DER ALTERNIERENDEN FOLGE)

Die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte 1 und -1 der Teilfolgen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$. \diamond

BEMERKUNG 2.17 Eine konvergente Folge besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert. \blacktriangleleft

SATZ 2.18 (SATZ VON BOLZANO¹²-WEIERSTRASS¹³)

Jede beschränkte, reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge und hat damit mindestens einen Häufungspunkt.

BEMERKUNG 2.19 Dieser Satz mag zunächst etwas zusammenhanglos wirken. Ihm kommt jedoch in vielen Existenzaussagen eine große Bedeutung zu. Mit dem Begriff der *Kompaktheit*, welcher in der Analysis 2 eingeführt wird, lassen sich so einige topologische Aussagen über metrische Räume treffen. \blacktriangleleft

Wir wenden uns nun den Begriffen *Limes-superior* und *Limes-inferior* zu.

Jede reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist zwischen $\overline{a_n} := \sup\{a_m | m \geq n\}$ und $\underline{a_n} := \inf\{a_m | m \geq n\}$ eingeschlossen. D.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}$. Dies motiviert die folgende Definition.

¹² Bernard Bolzano (1781-1848), katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker.

¹³ Karl Weierstraß (1815-1897), deutscher Mathematiker; stellte die Analysis auf ein solides Fundament.

DEFINITION 2.20 (LIMES-SUPERIOR & LIMES-INFERIOR)

Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert man den ...

▷ **Limes-superior** als $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_m | m \geq n\}$,

▷ **Limes-inferior** als $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_m | m \geq n\}$.

Diese Definition mag auf den ersten Blick etwas schwer verdaulich wirken. Die Essenz hinter beiden Grenzwerten ist jedoch recht leicht zu verstehen. Der Limes superior bzw. inferior einer Folge gibt den Wert des größten bzw. kleinsten Häufungspunktes der Folge an. Besitzt eine Folge mindestens zwei voneinander verschiedene Häufungspunkte, so konvergiert sie nicht. Die Begriffe Limes-superior und inferior ersetzen dann mehr oder weniger den Grenzwert und stellen den "größten und kleinsten Grenzwert" dar. Sehen wir uns das anhand eines kleinen Beispiels an.

BEISPIEL 2.21 (LIMES-SUPERIOR & LIMES-INFERIOR DER ALTERNIERENDEN FOLGE)

Wir betrachten wieder die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$. Diese Folge hat wie wir in Beispiel 2.16 gesehen haben, die Häufungspunkte 1 und -1 . Da dies gleichzeitig die einzigen, durch die Folge angenommenen Werte sind, gilt damit $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$. Dies können wir auch durch Anwenden von Definition 2.20 nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{(-1)^m | m \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ \text{und } \liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{(-1)^m | m \geq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1. \end{aligned} \quad \diamond$$

Zum Schluss wenden wir uns noch einigen Rechenregeln für konvergente Folgen zu.

SATZ 2.22 (RECHENREGELN FÜR KONVERGENTE FOLGEN)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, sofern $b \neq 0$,
- ▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$.

Der Beweis solcher Aussagen ist eine gute Übung im Umgang mit der Grenzwertdefinition. Wir zeigen daher die erste Aussage.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle N_1 und N_2 so groß, dass $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

BEMERKUNG 2.23 Diese Rechenregeln sind nur dann garantiert richtig, wenn auch alle beteiligten Folgen konvergieren. Wählt man beispielweise $a_n = n$ und $b_n = -n$, so verliert die erste Aussage ihre Gültigkeit. ◀

Zum Schluss sprechen wir noch das *Einschlusskriterium* an, welches vor allem dann hilfreich ist, wenn man eine Folge sowohl von oben als auch unten durch konvergente Folgen "einquetschen" kann. Daraus folgt dann die Konvergenz der eingequetschten Folge.

SATZ 2.24 (EINSCHLIESSUNGSKRITERIUM)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_n \leq b_n \leq c_n$, so konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und zwar gegen a .

3. REIHEN

Kommen wir nun zu einer speziellen Art von Folgen, nämlich den Reihen.

DEFINITION 3.1 (PARTIALSUMME & REIHE)



- ▷ Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter der m -ten **Partialsomme** versteht man

$$s_m := \sum_{n=0}^m a_n.$$

- ▷ Der Grenzwert der Folge $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt **Reihe** mit den **Gliedern** a_n und wird mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

abgekürzt.

D.h. Reihen sind letztlich wieder nur Folgen, nämlich Folgen von Partialsummen. Damit übertragen sich auch alle üblichen Sätze wie diverse Konvergenzkriterien und Rechenregeln nahtlos von Folgen auf Reihen.

BEISPIEL 3.2 (WICHTIGE REIHEN)

- ▷ Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ . Der dafür denkbar einfachste Beweis kann mit den Methoden der Integralrechnung in Kapitel 6 geführt werden.
- ▷ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6}$. Das wird in Kapitel 8 mit Methoden der Fourieranalysis gezeigt.
- ▷ Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert gegen $-\ln 2$. \diamond

Interessanterweise gibt es bei Reihen zwar viele Konvergenzkriterien, aber nur wenige Möglichkeiten, den Grenzwert der Reihe konkret auszurechnen. Zwei immer wieder auftauchende Methoden zur konkreten Berechnung von solchen Grenzwerten ist zum einen das Verwenden der geometrischen Reihe aus Beispiel 3.2 oder das Erkennen einer Teleskopsumme.

DEFINITION 3.3 (TELESKOPSUMME)

Jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich als Reihe darstellen, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}).$$

Mit Definition 3.3 haben wir also die Möglichkeit, eine Folge auch immer als Reihe darzustellen. Das kehrt mehr oder weniger die Tatsache, dass Reihen auch nur Folgen von Partialsummen sind, um. Wir können also problemlos aus einer Folge eine Reihe machen und umgekehrt.

3.1. KONVERGENZKRITERIEN FÜR REIHEN

Wir erarbeiten uns nun einige nützliche Konvergenzkriterien für Reihen. Zunächst behandeln wir dabei ein notwendiges Kriterium, dessen Kontraposition ein starkes Divergenzkriterium liefert.

SATZ 3.4 (KONVERGENTE REIHE \Rightarrow REIHENGLIEDER BILDEN NULLFOLGE)

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so bilden die Glieder a_n eine Nullfolge. D.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Beweis. Wir schreiben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mithilfe der Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Teleskopsumme, d.h. sei $a_n := s_n - s_{n-1}$. Da die Folge der Partialsummen nach Voraussetzung konvergiert, greift die Grenzwertarithmetik. Wir dürfen also die Linearität der Grenzwertbildung ausnutzen und es folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$. \square

In Beispiel 3.2 haben wir bereits die alternierende harmonische Reihe kennengelernt. Mit dem folgenden Satz folgt unmittelbar ihre Konvergenz.

SATZ 3.5 (LEIBNIZ¹⁴-KRITERIUM)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle, monoton fallende, nichtnegative Nullfolge. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Alle weiteren Konvergenzkriterien liefern automatisch *absolute Konvergenz*.

DEFINITION 3.6 (ABSOLUTE KONVERGENZ)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

BEMERKUNG 3.7 Freilich folgt aus absoluter Konvergenz einer Reihe automatisch die gewöhnliche Konvergenz. Dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, macht man sich anhand der alternierenden harmonischen Reihe klar. \blacktriangleleft

SATZ 3.8 (MAJORANTENKRITERIUM)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent mit nichtnegativen Gliedern und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

SATZ 3.9 (QUOTIENTENKRITERIUM)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $q := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existiert, dann gilt:

$$\begin{cases} q < 1 \implies \text{Reihe konvergiert absolut,} \\ q > 1 \implies \text{Reihe divergiert.} \end{cases}$$

SATZ 3.10 (WURZELKRITERIUM)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dann gilt: $\begin{cases} q < 1 \implies \text{Reihe konvergiert absolut,} \\ q > 1 \implies \text{Reihe divergiert.} \end{cases}$

BEMERKUNG 3.11 Weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium machen eine verlässliche Aussage für den Fall $q = 1$. Vielmehr ist das ein separat zu untersuchender Grenzfall, für welchen alles mögliche passieren kann:

¹⁴ *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716), deutscher Philosoph, Mathematiker und Jurist.

▷ Für $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist $q = 1$ und die Reihe konvergiert.

▷ Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist $q = 1$ und die Reihe konvergiert absolut.

▷ Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist $q = 1$ und die Reihe divergiert. ◀

Wir gehen noch der Frage nach, wie man Reihen konsistent miteinander multiplizieren kann.

SATZ 3.12 (CAUCHY-PRODUKT)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ mit } c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut.

3.2. POTENZREIHEN

Potenzreihen werden uns noch häufiger begegnen. Sowohl für diese Vorlesung, als auch in der Analysis 2 und 3 sowie in den Physikvorlesungen. Sie erlauben uns, Funktionen als Reihen darzustellen. Wir werden zunächst den Begriff der Potenzreihe formal einführen und ihre Konvergenz diskutieren. In Kapitel 5 widmen wir uns dann einer speziellen Art von Potenzreihen, nämlich den *Taylorreihen*.



DEFINITION 3.13 (POTENZREIHE & KONVERGENZRADIUS)

▷ Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . Eine Reihe der Form $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$ heißt **Potenzreihe**.

▷ Der **Konvergenzradius** $R \in [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$ einer Potenzreihe $P(z)$ ist definiert als $R := \sup\{|z| \mid z \in \mathbb{C} \wedge P(z) \text{ konvergiert}\}$ bzw. $R = \infty$, falls das Supremum in \mathbb{R} nicht existiert.

BEMERKUNG 3.14 Berechnen lässt sich der Konvergenzradius z.B. mit der *Formel von Cauchy-Hadamard*¹⁵: $\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$. ◀

Viele wichtige Funktionen sind über Potenzreihen definiert.

BEISPIEL 3.15 (WICHTIGE POTENZREIHEN)

▷ $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 : \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, (Geometrische Reihe)

▷ $\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, (Exponentialreihe)

▷ $\forall z \in \mathbb{C} : \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, (Sinusreihe)

¹⁵ Jacques Hadamard (1865-1963), französischer Mathematiker.

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C} : \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad (\text{Cosinusreihe})$$

$$\triangleright \forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } \alpha \in \mathbb{C} : (1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k, \quad (\text{Binomialreihe})$$

Wobei $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha+1-j}{j}$ der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* ist. \diamond

SATZ 3.16 (POTENZREIHEN KONVERGIEREN AUF KREISSCHEIBEN)

Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einer Folge in \mathbb{C} .

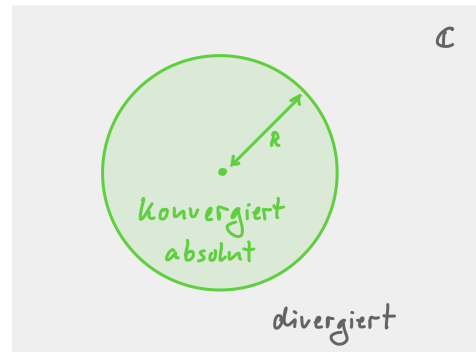
Dann gilt:

$\triangleright P(z)$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$,

$\triangleright P(z)$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

BEMERKUNG 3.17

\triangleright Da $|z| < R$ genau das Innere eines Kreises mit Radius R ist, handelt es sich beim Konvergenzradius also tatsächlich um einen Radius. Das sieht man natürlich nur im Komplexen. Es gilt also, dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius (also für $|z| < R$) absolut konvergiert. Auf dem Rand des Konvergenzbereiches (also für $|z| = R$) lässt sich keine eindeutige Konvergenzaussage treffen und außerhalb (also für $|z| > R$) divergiert die Potenzreihe.



\triangleright Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind, heißen *analytisch*. \blacktriangleleft

BEISPIEL 3.18 (GEOMETRISCHE REIHE)

Wie in Beispiel 3.15 behauptet, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für $|z| < 1$ gegen $\frac{1}{1-z}$.

Das ist konsistent mit Satz 3.16, denn der Konvergenzradius der geometrischen Reihe ist 1. Für $|z| > 1$ folgt die Divergenz der geometrischen Reihe unmittelbar aus Satz 3.15. Für $|z| = 1$ ist $|z^k| = |z|^k = 1$ und die Divergenz folgt aus Satz 3.4, es gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty. \quad \diamond$$

4. STETIGKEIT

Nachdem wir uns in den Kapiteln 2 und 3 mit diskreten Abbildungen von \mathbb{N} nach \mathbb{R} oder \mathbb{C} beschäftigt haben, weiten wir dies nun auf Funktionen mit einem in \mathbb{R} oder \mathbb{C} liegenden Definitionsbereich aus. Eine wichtige Eigenschaft, welche solche Funktionen besitzen können ist die *Stetigkeit*. Man kann sich eine stetige Funktion wohl am besten dadurch vorstellen, dass man sie “zeichnen kann, ohne den Stift abzuheben”. Freilich ist das keine mathematische Definition. Wir werden die Stetigkeit einer Funktion über Vertauschbarkeit von Folgengrenzwerten mit der Funktion charakterisieren. Im Folgenden seien M und N stets Teilmengen von \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Wir beschränken uns also auf die Definition von Stetigkeit reeller und komplexer Funktionen. Der Stetigkeitsbegriff wird dann in der Analysis 2 auf deutlich allgemeinere Abbildungen ausgeweitet.



DEFINITION 4.1 (STETIGKEIT)

- ▷ Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in M$, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $a_n \in M^{\mathbb{N}}$ ⁽¹⁶⁾ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$.
- ▷ $f : M \rightarrow N$ heißt dann **stetig**, wenn f in allen Punkten $x_0 \in M$ stetig ist.

KOROLLAR 4.2 (VERKNÜPFUNGEN STETIGER FUNKTIONEN SIND STETIG)

Sind $f, g : M \rightarrow N$ in $x_0 \in M$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann sind auch die folgenden, punktweise definierten, Funktionen stetig:

- ▷ $M \ni x \mapsto f(x) + \lambda g(x)$,
- ▷ $M \ni x \mapsto f(x) \cdot g(x)$,
- ▷ $M \ni x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.

Beweis. Da Limiten von Summen, Vielfachen, Produkten und Quotienten gleich Summen, Vielfache, Produkte und Quotienten der Limiten sind, führen Summen, Vielfache, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen wieder auf stetige Funktionen. □

SATZ 4.3 (STETIGKEIT DER KOMPOSITION)

Ist $f : M \rightarrow N$ stetig in $x_0 \in M$ und $g : N \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei $a_n \in M^{\mathbb{N}}$ eine in x_0 konvergente Folge. Dann gilt:

$$g(f(x_0)) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)\right) \stackrel{g \text{ stetig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)). \quad \square$$

Stetigkeit lässt sich auch auf eine andere Art und Weise charakterisieren, welche sich dann auch anschaulich deuten lässt.

SATZ 4.4 ($\varepsilon - \delta$ -CHARAKTERISIERUNG VON STETIGKEIT)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in M$ stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

BEMERKUNG 4.5 Dieser Charakterisierung lässt sich eine anschauliche Deutung von Stetigkeit entnehmen. Wir betrachten einen festen Punkt x_0 und entfernen uns von diesem mit einem kleinen Abstand, welcher kleiner als δ sein soll, hin zum Punkt x . Wenn nun diese kleine Änderung der Urbildwerte auch eine kleine Änderung der Funktionswerte, d.h. $f(x)$ weicht von $f(x_0)$ weniger als das vorgegebene ε ab, bewirkt, ist die Abbildung stetig. Das ε ist dabei stets beliebig vorgegeben und wir müssen ein δ finden, so dass die gewünschte Relation erfüllt ist. ◀

¹⁶Für zwei Mengen M, N gilt: $N^M : \iff \{f | f : M \rightarrow N\}$.

BEISPIEL 4.6 (STETIGKEIT DER QUADRATWURZELFUNKTION)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \varepsilon\sqrt{x_0}$, denn dann ist

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon. \quad \diamond$$

Der Stetigkeitsbegriff kann auch weiter verschärft werden.

DEFINITION 4.7 (GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

BEMERKUNG 4.8 Hier darf δ zwar von ε , aber nicht von $x, y \in M$ abhängen. Für gewöhnliche Stetigkeit wäre eine Abhängigkeit von y erlaubt. Es handelt sich hierbei also tatsächlich um eine Verschärfung; der Punkt y muss auch im Gegensatz zur gewöhnlichen Stetigkeit variabel sein. \blacktriangleleft

BEISPIEL 4.9 Die Quadratwurzelfunktion aus Beispiel 4.6 ist damit zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, das dort gefundene δ eine Funktion von y , nämlich $\delta(y) = \varepsilon\sqrt{y}$ ist. \diamond

DEFINITION 4.10 (LIPSCHITZ¹⁷-STETIGKEIT)

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn

$$\exists L > 0 \forall x, y \in M : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

SATZ 4.11 (LIPSCHITZ-STETIGKEIT \implies STETIGKEIT)

Eine Lipschitz-stetige Funktion $f : M \rightarrow N$ ist stetig.

Beweisidee. Zu zeigen ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ für $x_0 \in M$. Für $x \in M$ ist aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von f der Abstand zwischen den Funktionswerten $f(x)$ und $f(x_0)$ durch ein Vielfaches des Abstandes zwischen den Argumenten x und x_0 beschränkt. Ist also x nicht weit von x_0 entfernt, so auch $f(x)$ von $f(x_0)$. Veranschaulicht liefert dies gerade die zu beweisende Grenzwertaussage.

Beweis. Auf Grundlage obiger Beobachtungen geben wir nun den Beweis. Es sei dazu $x_0 \in M$ und $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante von f , es gelte also

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

Zu $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $\delta > 0$ finden, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt.}$$

Für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist aber

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta$$

und daher wählen wir $\delta > 0$ so, dass $L\delta < \varepsilon$, also $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$. \square

BEMERKUNG 4.12

$\triangleright L$ heißt *Lipschitzkonstante*.

¹⁷Rudolf Lipschitz (1832-1903), deutscher Mathematiker und Hochschullehrer.

- ▷ Die Definition lässt schon erkennen, dass Lipschitz-stetige Funktionen in ihrer “Steigung” beschränkt sind. Dies wird in Kapitel 5 vertieft.
- ▷ Es gilt f Lipschitz-stetig $\implies f$ gleichmäßig stetig $\implies f$ stetig.
- ▷ Ist M abgeschlossen, so sind Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit äquivalent. ◀

DEFINITION 4.13 (ABSCHLUSS ALS MENGE ALLER GRENZWERTE)

Der **Abschluss** einer Teilmenge $D \subseteq M$ einer Menge M ist definiert als $\overline{D} := \{x \in M \mid \exists a_n \in D^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x\}$.

BEMERKUNG 4.14

- ▷ Der Abschluss lässt sich damit als Menge aller Grenzwerte von in D enthaltenen Folgen verstehen.
- ▷ Ist $D = \overline{D}$, so heißt D *abgeschlossen*.
- ▷ Der Begriff des Abschlusses wird in der Analysis 2 weiter verallgemeinert. ◀

BEISPIEL 4.15 (HALBOFFENE INTERVALLE SIND NICHT ABGESCHLOSSEN)

Das Intervall $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen. ◊

Beweis. Sei $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Dann ist jedes Folgenglied in $(0, 1]$ enthalten. Jedoch gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \notin (0, 1]$ und das steht im Widerspruch zur Abgeschlossenheit. ◻

BEMERKUNG 4.16 Der Abschluss fügt diesen Grenzwert noch hinzu.

Es gilt also $\overline{(0, 1]} = \{0\} \cup (0, 1] = [0, 1]$. ◀

Wir haben uns in Kapitel 2 eingehend mit Grenzwerten von Folgen beschäftigt. Wir bauen den Begriff des Grenzwertes nun auch auf Funktionen auf und werden dabei interessanterweise auf die Konvergenz von Folgen zurückgreifen.

DEFINITION 4.17 (FUNKTIONSGRENZWERT)

Für eine Funktion $f : M \rightarrow N$ und einen Punkt $x_0 \in M$ heißt $y_0 \in N$ der **Funktionsgrenzwert** von f bei x_0 , wenn für alle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y_0$. Wir schreiben dann “ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ”.

BEISPIEL 4.18 (EXISTENZ VON FUNKTIONSGRENZWERTEN)

- ▷ Ist f in $x_0 \in M$ stetig, wobei $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, so folgt aufgrund der Definition der Stetigkeit automatisch $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ▷ Der Funktionsgrenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht, da für $a_n = -b_n = \frac{1}{n}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty \neq -\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. Für die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ muss jedoch $\frac{1}{a_n}$ für alle Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren. ◊

SATZ 4.19 (EINSCHLIESSUNGSSATZ)

Gegeben seien die drei reellen Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Weiters sei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

für $y_0 \in \mathbb{R}$. und $f \leq g \leq h$ gelte in einer Umgebung von x_0 . Dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$.

LEMMA 4.20 (GRENZWERTBILDUNG UND BETRAG)

Für die reelle Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Beweisidee. Eine reelle Zahl ist genau dann Null, wenn es ihr Betrag ist. Diese Tatsache überträgt sich auf die Grenzwertbildung.

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung von Satz 4.19 und verbleibt als Übung. □

BEISPIEL 4.21 Mit dem Einschliessungssatz folgt die Stetigkeit der Sinusfunktion im Nullpunkt, also $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Denn offenbar gilt

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$, folgt mit dem Einschließungssatz $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$. Mit Lemma 4.20 erhalten wir $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. ◇

DEFINITION 4.22 (STETIGE FORTSETZUNG)

Sei $x_0 \in \overline{M} \setminus M$. Eine Funktion $\tilde{f} : M \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine **stetige Fortsetzung** von f in x_0 , wenn gilt:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \in M, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$

BEMERKUNG 4.23 Damit sind Funktionsgrenzwerte auch für Punkte definiert, die nicht im Definitionsbereich von f liegen. Notwendig ist nur, dass der Punkt im Abschluss enthalten ist. ◀

BEISPIEL 4.24 (BEISPIELE FÜR STETIGE FORTSETZUNGEN)

▷ $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2-x}{x-1}$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$. Hier wäre $x \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{1\}} = \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ wird durch $\tilde{f}(x) := x$ auf \mathbb{R} stetig fortgesetzt.

▷ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ lässt sich in $x = 0$ nicht stetig fortsetzen. ◇

BEMERKUNG 4.25 Konkrete Aussagen darüber, wann eine stetige Fortsetzung existiert, lassen sich dann im Rahmen der *Funktionentheorie* in der Analysis 3 treffen. ◀

Zum Schluss beschäftigen wir uns noch mit drei wichtigen Existenzsätzen.

SATZ 4.26 (ZWISCHENWERTSATZ)

Sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\forall y \in \mathbb{R} : \min\{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max\{f(a), f(b)\} : \exists x \in [a, b] : f(x) = y.$$

KOROLLAR 4.27 (NULLSTELLENSATZ)

Setze im Zwischenwertsatz $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt), dann besitzt f mindestens eine Nullstelle, d.h.

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0.$$

SATZ 4.28 (SATZ VOM MINIMUM UND MAXIMUM)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf $[a, b]$ sein Minimum und Maximum an. D.h.

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] : f(x_{\min}) = \inf f([a, b]) \wedge f(x_{\max}) = \sup f([a, b]).$$

BEMERKUNG 4.29 In Satz 4.28 sind die Voraussetzungen tatsächlich hinreichend für die Existenz von Extrema. Sie sind zwar nicht notwendig, aber sofern sie nicht erfüllt sind, ist die Existenz von Extrema nicht mehr garantiert. ◀

5. DIFFERENZIERBARKEIT

Da wir jetzt mit dem Konzept der Stetigkeit reeller Funktionen vertraut sind, können wir uns der Differentialrechnung zuwenden. Wie wir sehen werden, verschärft der Begriff der Differenzierbarkeit den der Stetigkeit. Es ist also für eine Funktion notwendig, stetig zu sein, um differenzierbar sein zu können. Wir werden den Begriff der *Ableitung* als lokales Änderungsverhalten einer Funktion kennenlernen.

5.1. DEFINITION, GRUNDBEGRIFFE UND RECHENREGELN

Wir erarbeiten uns nun den Begriff der *Ableitung* und untersuchen die Konsequenzen, welche daraus folgen.

DEFINITION 5.1 (DIFFERENZIERBARKEIT)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▷ f heißt **differenzierbar im Punkt** x_0 , wenn $f'(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir als die Ableitung von f im Punkt x_0 .
- ▷ f heißt **differenzierbar (auf I)**, wenn f in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist.
- ▷ f heißt **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar und die Ableitung f' stetig ist.
- ▷ $\mathcal{C}^n(I)$ bezeichnet die **Menge der auf I n -mal stetig differenzierbaren Funktionen**.

BEMERKUNG 5.2

- ▷ Für die Ableitung existieren viele äquivalente Schreibweisen: $f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = D_x f(x_0) = \dots$
- ▷ Die Substitution $h := x - x_0$ liefert für die Ableitung die äquivalente Darstellung $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. ◀

SATZ 5.3 (DIFFERENZIERBARKEIT \Rightarrow STETIGKEIT)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ offen in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.

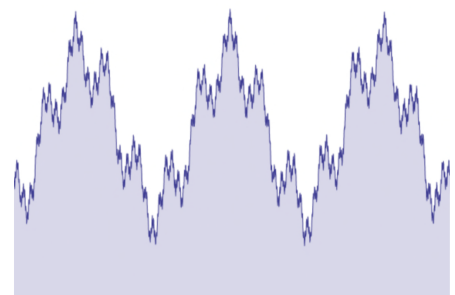
Beweis. Der Beweis verbleibt als Übung. ◻

BEMERKUNG 5.4

- ▷ Die Umkehrung von Satz 5.3 wird im Allgemeinen falsch sein. So ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ überall stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.
- ▷ Es gibt sogar Funktionen, welche überall stetig und trotzdem nirgendwo differenzierbar sind.

BEISPIEL 5.5 (NICHT DIFFERENZIERBARE OBJEKTE)

- Die *Weierstraß-Funktion*, definiert durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ mit $a \in (0, 1)$, $b \in 2\mathbb{N} + 1$ und $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist zwar stetig, aber so “zackig”, dass sie nirgends differenzierbar ist.



- Solche nicht differenzierbaren Abbildungen treten oft in der Physik auf. Viele stochastische Prozesse, wie die *Brownsche Bewegung* führen auf solche Kurven. \diamond

BEISPIEL 5.6 (ABLEITUNG DER IDENTITÄT = 1)

Wir betrachten die Identität auf \mathbb{R} , also die Abbildung

$$\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\text{id}'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{id}(x_0 + h) - \text{id}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Also ist die Identität auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx}x = 1$. \diamond

BEMERKUNG 5.7 Folgende wichtige Ableitungen können mithilfe von Definition 5.1 nachgerechnet werden.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Um mit Ableitungen auch konkret umgehen zu können, benötigen wir einige Rechenregeln.

SATZ 5.8 (ABLEITUNGSREGELN)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktionen sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) $(f + \lambda g)'(x_0) = f'(x_0) + \lambda g'(x_0)$ (Linearität)
- (ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel)
- (iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, sofern $g(x_0) \neq 0$ (Quotientenregel)

Beweis.

(i) Trivial, da nach Satz 2.22 die Bildung von Grenzwerten ebenfalls linear ist.

(ii) Mit der Definition des Differentialquotienten folgt

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} g(x_0 + h) + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} f(x_0) \right] \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

(iii) Folgt aus (ii), zusammen mit der gleich in Satz 5.10 folgenden Kettenregel. \square

BEISPIEL 5.9 (ABLEITUNG DES TANGENS)

Auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{\pi} + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt mit der Quotientenregel

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \diamond$$

SATZ 5.10 (KETTENREGEL)

Seien $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ offen. Existieren $g'(x_0)$ und $f'(g(x_0))$, dann gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Beweis. Gemäß der Definition der Ableitung ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

BEISPIEL 5.11 (ANWENDUNG DER KETTENREGEL)

Auf \mathbb{R} gilt

$$\begin{aligned} (\sin^2(\cos x))' &= 2 \sin(\cos x) \cdot (\sin(\cos x))' \\ &= 2 \sin(\cos x) \cdot \cos(\cos x) \cdot (-\sin x). \quad \diamond \end{aligned}$$

SATZ 5.12 (ABLEITUNG VON UMKEHRFUNKTIONEN)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis der Rechenregel, ohne die Differenzierbarkeit von f^{-1} selbst zu zeigen.

Wegen der strengen Monotonie gilt $y = f(f^{-1}(y))$. Das leiten wir mit der Kettenregel ab und erhalten

$$1 = f'(f^{-1}(y_0))(f^{-1})'(y_0). \quad \square$$

KOROLLAR 5.13 (ABLEITUNG DES LOGARITHMUS)

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ gilt $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{y_0}$.

Beweis. Wegen Differenzierbarkeit von f folgt $f'(x) = e^x$ und mit Satz 5.12 erhalten wir

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\exp(\ln(y_0))} = \frac{1}{y_0}. \quad \square$$

Zum Schluss führen wir noch das für die Integralrechnung wichtige Konzept der *Stammfunktion* ein.

DEFINITION 5.14 (STAMMFUNKTION)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'(x) = f(x) \forall x \in I$, so heißt F **Stammfunktion** von f .

Der folgende Satz zeigt, dass Stammfunktionen nicht eindeutig bestimmt sind.

SATZ 5.15 (STAMMFUNKTIONEN UNTERSCHIEDEN SICH UM KONSTANTEN)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine weitere Funktion $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine weitere Stammfunktion von f , wenn $F - G$ konstant ist.

Beweis.

▷ “ \implies ”: Sei G eine Stammfunktion von f .

Wegen Linearität der Ableitung gilt $(F - G)' = f - f = 0 \implies F - G$ konstant.

▷ “ \impliedby ”: Vorausgesetzt, $F - G$ ist konstant. Dann gilt $G' = F' - (F - G)' = f$. □

5.2. ANWENDUNGEN DER DIFFERENTIALRECHNUNG

Wir wenden uns nun den Anwendungen des nun eingeführten theoretischen Konstrukts zu. Wir lernen wichtige Existenzsätze kennen, welche in vielen Beweisen der Analysis auftauchen, wir vertiefen das Konzept der Kurvendiskussion aus der Schule, behandeln die *Regel von l'Hospital* und lernen den *Satz von Taylor* kennen.



SATZ 5.16 (SATZ VON ROLLE¹⁸)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

D.h. für eine auf $[a, b]$ definierte, auf (a, b) differenzierbare Funktion mit identischen Randfunktionswerten wird die Funktion zwischendurch eine Stelle mit waagrechter Tangente besitzen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle ist der *Mittelwertsatz*.

SATZ 5.17 (MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar. Dann

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir definieren eine geeignete Funktion, sodass die Aussage des Mittelwertsatzes aus dem Satz von Rolle folgt.

Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Dann ist F als Komposition differenzierbarer Abbildungen auf (a, b) differenzierbar mit $F(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es nun ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. \square

KOROLLAR 5.18 (VERSCHWINDENDE ABLEITUNG \Rightarrow FUNKTION KONSTANT)

Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Beweis. Seien $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$ beliebig. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $0 = f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Daraus folgt schon, dass f konstant sein muss. \square

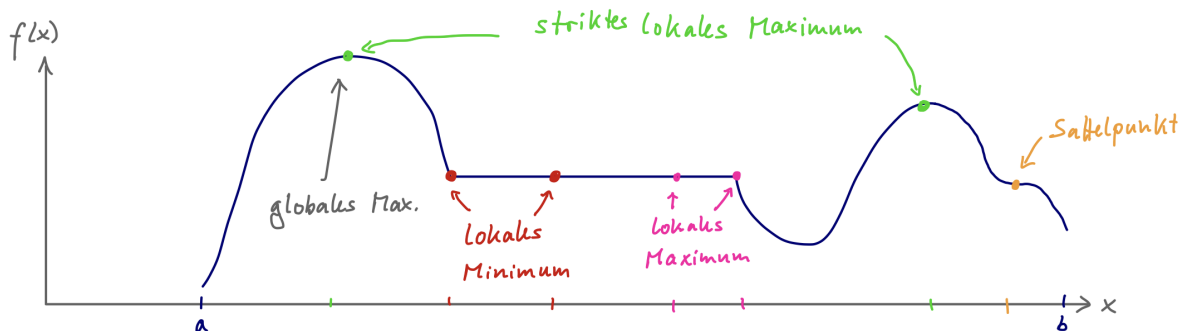
Wir wenden uns nun einem Thema zu, welches schon im Schulunterricht behandelt wurde. Wir werden im Folgenden das Auffinden und Klassifizieren von Extremalstellen behandeln. Dabei werden wir, anders als in der Schule, klare Aussagen mit klaren Voraussetzungen formulieren und manche von ihnen auch mit den uns zur Verfügung stehenden Methoden beweisen.

DEFINITION 5.19 (MAXIMUM & MINIMUM)

Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein **Maximum** (bzw. **Minimum**) in $x_0 \in (a, b)$, wenn

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : f(x) \leq f(x_0) \text{ (bzw. } f(x) \geq f(x_0)).$$

Gilt " $<$ " (bzw. " $>$ "), so ist das Maximum (bzw. Minimum) **strikt**.



¹⁸Michel Rolle (1652-1719), französischer Mathematiker.

Bei der Klassifikation von Extrema treten viele verschiedene Begriffe auf, welche wir anhand der Grafik von links nach rechts erklären werden.

- ▷ Ein *striktes lokales Maximum* ist ein gewöhnliches Maximum, sodass die Funktion vor dem Maximum ansteigt und danach abfällt.
- ▷ ein *globales Maximum* unterscheidet sich vom lokalen Maximum derart, dass es das “größte Maximum” unter den Maxima ist. Selbiges würde auch für ein globales Minimum in umgekehrter Logik gelten.
- ▷ (lokale) Minima und Maxima unterscheiden sich von strikten Extrema dadurch, dass die Funktion vor oder nach dem Extremum auch konstant sein darf. Eine überall konstante Funktion würde per Definition also in jedem Punkt auch ein Extremum besitzen.
- ▷ *Sattelpunkte* zeichnen sich dadurch aus, dass sie zwar Punkte mit waagrechter Tangente sind, jedoch handelt es sich hier nicht um Extrema. Die Funktion wird vor und nach dem Sattelpunkt an- oder absteigen. Mit Ableitungen lassen sich Sattelpunkte x_0 einer Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dadurch charakterisieren, dass $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ gilt.

Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für ein Extremum.

SATZ 5.20 (NOTWENDIGE BEDINGUNG FÜR EIN LOKALES EXTREMUM)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass f in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum besitzt und dort auch differenzierbar ist. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei x_0 o.B.d.A. ein Maximum von f . Dann gilt

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\text{und } f'_-(x_0) := \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geq 0.$$

Wegen Differenzierbarkeit von f bei x_0 gilt dann $0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$. □

BEMERKUNG 5.21 Die Umkehrung wird im Allgemeinen nicht gelten. So hat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ bei $x_0 = 0$ verschwindende Ableitung, obwohl dort kein Extremum vorliegt. ◀

SATZ 5.22 (WACHSTUMSSATZ)

Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

- (i) $f' \geq 0 \iff f$ ist monoton wachsend,
- (ii) $f' > 0 \implies f$ ist streng monoton wachsend,
- (iii) $f' \leq 0 \iff f$ ist monoton fallend,
- (iv) $f' < 0 \implies f$ ist streng monoton fallend.

Beweis. O.b.d.A. für f streng monoton wachsend.

Für $x, y \in (a, b)$ mit $x > y$ garantiert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 5.17), dass

$$\exists x_0 \in (x, y) : f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y).$$

Wegen Positivität der rechten Seite folgt die Behauptung. □

Nun haben wir mit Satz 5.20 ein Kriterium zum Auffinden von Extrema bekommen. Nun interessieren wir uns für die Klassifizierung.

SATZ 5.23 (HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR LOKALE EXTREMA)

Seien $f \in \mathcal{C}^2(I)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $x_0 \in I$ so, dass $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

- (i) $f''(x_0) > 0 \implies f$ hat in x_0 ein striktes lokales Minimum,
- (ii) $f''(x_0) < 0 \implies f$ hat in x_0 ein striktes lokales Maximum.

BEMERKUNG 5.24 Auch hier gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel wäre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$. ◀

Für das Auffinden und Klassifizieren von Extrema einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ geht man also wie folgt kochrezeptartig vor:

1. Finde alle $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ und teste gegebenenfalls mit dem Vorzeichen von $f''(x_0)$, ob ein lokales Extremum vorliegt.
2. Untersuche die Randpunkte des Intervalls I . Liegen Randextrema vor?
3. Falls f nicht überall differenzierbar ist, sind die Punkte, für die die Ableitung nicht existiert, weitere Kandidaten für Extrema.
4. Bestimme globale Extrema unter den gefundenen Kandidaten durch Vergleich der Funktionswerte.

Neben der Monotonie gibt es noch den Begriff der *Konvexität*¹⁹.

DEFINITION 5.25 (KONVEXITÄT)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

▷ f heißt **konvex**, wenn

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

▷ Gilt “<” statt “≤”, so heißt f **strikt konvex**.

▷ f heißt **(strikt) konkav**, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

SATZ 5.26 (HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR KONVEXITÄT)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Dann gilt:

- (i) $f'' \geq 0 \iff f$ konvex,
- (ii) $f'' > 0 \implies f$ strikt konvex,
- (iii) $f'' \leq 0 \iff f$ konkav,
- (iv) $f'' < 0 \implies f$ strikt konkav.

Damit schließen wir die Kurvendiskussion ab. Wir wenden uns nun einer Methode zu, um formal undefinierten Grenzwerten wie “ $\frac{0}{0}$ ”, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, “ $0 \cdot \infty$ ” und “ 0^0 ” dennoch einen Wert zuzuordnen.

SATZ 5.27 (REGEL VON L’HOSPITAL²⁰)

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g'(x_0) \neq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$. Ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$ und existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide Grenzwerte stimmen überein.

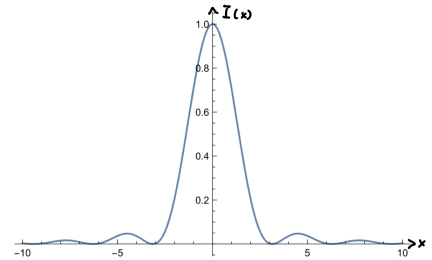
¹⁹Im Schulunterricht taucht in der Regel der Begriff der Links- bzw. Rechtskrümmung auf. Diese Bezeichnungen sind jedoch ungünstig gewählt, da der Begriff der Konvexität (bzw. Konkavität) auch auf Abbildungen anwendbar ist, welche sich nicht mehr grafisch veranschaulichen lassen, während Wörter wie “links” oder “rechts” eine Anschauung implizieren.

²⁰*Guillaume François Antoine, Marquis de L’Hospital* (1661-1704), französischer Mathematiker.

BEMERKUNG 5.28 Analoges gilt auch für $x_0 \rightarrow \infty$ oder $f(x_0) = g(x_0) \rightarrow \infty$. ◀

BEISPIEL 5.29 (INTENSITÄT EINES EINFACHSPALTS IM URSPRUNG)

Schickt man durch einen Einfachspalt Licht durch, so ist die Intensität des am Spalt gebeugten Lichts gegeben durch $I(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.



Interessiert man sich für die Intensität im Ursprung, so führt dies auf den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$. Aufgrund der Stetigkeit des Quadrierens gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2.$$

Da sowohl Zähler und Nenner von $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$ verschwinden, ist die Regel von l'Hospital anwendbar und es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \stackrel{\text{l'H}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Die Lichtintensität im Ursprung liegt also bei 100%. ◊

Zuletzt kommen wir noch auf den *Satz von Taylor* zu sprechen, welcher eines der wichtigsten Resultate der Analysis 1 ist und auch in der Physik regelmäßig angewendet wird. Grob gesprochen interessieren wir uns für die Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome.

SATZ 5.30 (SATZ VON TAYLOR²¹)

Sei $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$ und $f^{(n+1)}$ auf (a, b) existent. Für $x, x_0 \in [a, b]$ mit $x \neq x_0$ existiert ein ξ zwischen x_0 und x , so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=T_n f(x; x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{=R_n f(x; x_0)}.$$

$T_n f(x; x_0)$ nennt man das **Taylorpolynom n -ter Ordnung von f bei x_0** und $R_n f(x; x_0)$ das **Lagrangesche²² Restglied**.

BEMERKUNG 5.31

- ▷ Für das Restglied existieren viele alternative Darstellungen. Das Lagrangesche Restglied ist eine Möglichkeit dafür. In der Physik wird das Restglied in der Regel nicht konkret angegeben; stattdessen wird die *Landau²³-Notation* verwendet. So gilt dann bspw. $R_n f(x; x_0) = \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}) = o((x - x_0)^n)$. Dies wird in der Übung konkretisiert.
- ▷ In Anwendungen gelangt der Satz von Taylor dadurch zu besonderer Bedeutung, dass stetig differenzierbare Funktionen bspw. durch ihr erstes Taylorpolynom approximiert werden können. Mit diesem Taylorpolynom kann man dann deutlich bequemer "rechnen"

²¹ Brook Taylor (1685-1731), britischer Mathematiker und Mitglied der Royal Society.

²² Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), italienischer Mathematiker und Astronom.

²³ Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938), deutscher Mathematiker.

als mit der ursprünglichen Funktion. So wird der Sinus $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $T_1 \sin(x; 0) = x$ linear approximiert. Eine lineare Approximation bezeichnet man auch als *Linearisierung*. Betrachtet man die Bewegungsgleichung eines Pendels, $\ddot{x} + \sin x = 0$, so wird diese in der Physik gerne zu einer linearen Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 0$ linearisiert, welche dann besser gelöst werden kann. Mit Differentialgleichungen werden wir uns in Kapitel 9 näher beschäftigen. ◀

Wir betrachten nun noch den “Worst-Case”. Wir schicken $n \rightarrow \infty$, womit das Restglied verschwindet und aus dem Taylorpolynom die *Taylorreihe* wird.

DEFINITION 5.32 (TAYLORREIHE)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen mit den Randpunkten x und x_0 . Für $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ ⁽²⁴⁾ heißt die (konvergente oder divergente) Reihe

$$T_\infty f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von f bei x_0 .

BEMERKUNG 5.33 Im Allgemeinen gilt $T_\infty f(x; x_0) = f(x)$ nicht überall, siehe Beispiel 5.34. Selbst beliebig oft stetig differenzierbare, also \mathcal{C}^∞ -Funktionen müssen keine gegen die Funktion konvergente Taylorreihe besitzen. Funktionen wie \sin, \cos oder \exp , die überall gegen ihre Taylorreihe konvergieren, bezeichnet man als *analytisch* und den *Raum der auf \mathbb{R} analytischen Funktionen* mit $\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$. ◀

BEISPIEL 5.34 ($\mathcal{C}^\infty \neq \mathcal{C}^\omega$)

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Zwar gilt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $T_\infty f(x; 0) = 0$ aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. Das zeigt $\mathcal{C}^\infty \neq \mathcal{C}^\omega$. ◊

²⁴Hierbei ist $\mathcal{C}^\infty(I) := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(I)$ die Menge der auf I unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen.

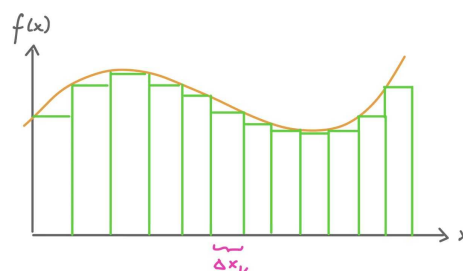
6. RIEMANN-INTEGRAL

6.1. DEFINITION UND GRUNDBEGRIFFE

Wir erarbeiten uns nun das Gegenstück zur Differentialrechnung. Die Integration einer Funktion kehrt die Operation des Differenzierens nämlich genau um. Wir führen hier das *Riemann-Integral* ein. Dies ist der geläufigste und in der Praxis am meisten verwendete Integralbegriff.



Stark vereinfacht ausgedrückt, interessieren wir uns für den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen. Nun gibt es für solche beliebigen Flächenstücke im Allgemeinen keine fertige Formel, in welche wir geometrische Größen einsetzen können, um den Flächeninhalt bestimmen zu können. Wir lösen dieses Problem, indem wir den Flächeninhalt in n kleine Rechtecke zerlegen und so die einzelnen Rechtecksflächen aufsummieren.



Nun ist der so berechnete Flächeninhalt aber noch mit einem großen Fehler behaftet. Um auch das in den Griff zu bekommen, verfeinern wir die Partition²⁵ versteht man . D.h. wir wählen immer mehr Rechtecke, die dafür immer schmaler werden. Im Grenzfalle $n \rightarrow \infty$ ist dann das **Riemann²⁶-Integral** definiert als

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $x_k - x_{k-1} =: \Delta x_k$ die Streifenbreite ist.

BEMERKUNG 6.1

- ▷ Das Riemann-Integral haben wir hiermit nicht rigoros definiert. Mathematisch präzise wird es über *Treppenfunktionen* eingeführt. Insbesondere auf die Eigenschaften der Partition werden wir hier nicht näher eingehen. Mit der reinen Definition des Riemann-Integrals werden wir auch nicht weiter arbeiten müssen.
- ▷ Das Flächenstück lässt sich in eine *Ober-* und *Untersumme* zerlegen. Konvergieren beide Zerlegungen gegen denselben Wert, so nennt man f **Riemann-integrierbar**.
- ▷ Die **Menge der auf $I \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbaren Funktionen** bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(I)$.
- ▷ Es gibt noch viele weitere Integralbegriffe. Für Anwendungen außerhalb der reinen Mathematik ist das Riemann-Integral der Wichtigste. In der Analysis 3 wird noch das *Lebesgue²⁷-Integral* eingeführt, welches viele Probleme die das Riemann-Integral mit sich trägt, beseitigt. ◀

SATZ 6.2 (HINREICHENDE KRITERIEN FÜR RIEMANN-INTEGRIERBARKEIT)

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, wenn sie monoton oder stetig ist.

²⁵Unter einer *Partition* einer Menge M versteht man eine Familie $B_i, i \in I$ mit einer Indexmenge I , so dass $\bigcup_{i \in I} B_i = M$ und $i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$.

²⁶Bernhard Riemann (1826-1866), deutscher Mathematiker.

²⁷Henri Léon Lebesgue (1875-1941), französischer Mathematiker.

BEMERKUNG 6.3 Riemann-Integrierbarkeit ist damit eine schwächere Eigenschaft als Differenzierbarkeit, da die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen eben auch bspw. nur stetige, aber nicht differenzierbare Funktionen wie $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ umfasst. ◀

Glücklicherweise sind damit sehr viele Funktionen Riemann-integrierbar, natürlich insbesondere alle stetigen Funktionen wie Polynome, \exp , \ln , \sin , \cos , \dots . Jedoch gibt es auch nicht Riemann-integrierbare Funktionen, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 6.4 (DIRICHLETSCHES²⁸ SPRUNGFUNKTION)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

dann ist f nicht Riemann-integrierbar. Hier unterscheiden sich Ober- und Untersumme um den Wert 1. Das ist auch kein Widerspruch zu Satz 6.2, da f weder monoton noch stetig ist. ◊

Kommen wir zu einigen Eigenschaften Riemann-integrierbarer Funktionen.

SATZ 6.5 (EIGENSCHAFTEN RIEMANN-INTEGRIERBARER FUNKTIONEN)

Seien $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(i) \int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \lambda \int_a^b g(x) \, dx \quad (\text{Linearität})$$

$$(ii) \forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx \quad (\text{Monotonie})$$

$$(iii) \text{ Für } x \in (a, b) \text{ gilt } \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\text{Additivität})$$

$$(iv) \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

$$(v) \int_a^a f(x) \, dx = 0 \quad (\text{Nullmengen})$$

DEFINITION 6.6 (RIEMANN-INTEGRAL MIT VERTAUSCHTEN GRENZEN)

Sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$, dann gilt für $a < b$, dass $\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$.

Mit diesen Grundlagen können wir uns dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zuwenden. Wenn Sie auf eine einsame Insel verbannt werden würden und nur drei Sätze der Analysis 1 mitnehmen dürften, sollten Sie diesen mit einpacken.

Zunächst benötigen wir jedoch den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*.

SATZ 6.7 (MITTELWERTSATZ DER INTEGRALRECHNUNG)

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b])$, dann

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b - a).$$

²⁸ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), deutscher Mathematiker.

SATZ 6.8 (HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG)

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b])$, dann gilt:

(i) Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \int_a^x f(t) dt$. Dann ist F Stammfunktion von f ,
d.h. $F'(x) = f(x)$.

(ii) Sei F Stammfunktion von f , dann ist $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Beweis.

(i) Zu zeigen ist also $F'(x) = f(x)$. Das beweisen wir durch Auswerten des Differentialquotienten. Sei also

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \stackrel{\text{Additivität}}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \stackrel{\text{Satz 6.7}}{=} f(y_h)$$

für ein $y_h \in [x, x+h]$. Für $h \rightarrow 0$ gilt $y_h \rightarrow x$ und wegen Stetigkeit von f gilt $f(y_h) \rightarrow f(x)$.

(ii) Sei $G(x) := \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f . Nach Satz 5.15 gibt es für jede weitere Stammfunktion F ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = G(x) + c$. Damit folgt

$$F(x) - \int_a^x f(t) dt = c \implies \begin{cases} x = b : & F(b) - \int_a^b f(t) dt = c, \\ x = a : & F(a) - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} = c. \end{cases}$$

Durch Einsetzen folgt insgesamt die Behauptung. □

Damit haben wir eine konkrete Berechnungsmöglichkeit für solche sogenannten bestimmten

Integrale $\int_a^b f(x) dx$: Wir finden eine Stammfunktion F , werten sie an den Rändern a, b des

Integrationsgebietes aus und bilden die $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$. Wie sich zeigt, ist das Finden einer solchen Stammfunktion häufig ein schwieriges oder sogar unmögliches Unterfangen²⁹. Im Folgenden lernen wir dennoch einige elementare Methoden kennen.

6.2. INTEGRATIONSTECHNIKEN

Nachdem wir nun allgemeine Eigenschaften des Riemann-Integrals und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt haben, können wir uns, gerüstet mit diesen Methoden, einigen konkreten Integrationstechniken zuwenden. Wir beginnen mit einer Art Produktregel für die Integration.



²⁹Viele "elementare" Funktionen, wie z.B. e^{-x^2} oder $\frac{\sin x}{x}$ haben keine elementare Stammfunktion.

SATZ 6.9 (PARTIELLE INTEGRATION)

Seien $f, g \in \mathcal{C}((a, b))$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Beweis. Sei $F(x) := f(x)g(x)$, dann ist F als Produkt differenzierbarer Funktionen differenzierbar und nach der Produktregel gilt

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Da F offenbar eine Stammfunktion von F' ist, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, zusammen mit der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned} [F(x)]_a^b &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

BEISPIEL 6.10 (ANWENDUNG DER PARTIELLEN INTEGRATION)

▷ Mit $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$ ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$ und es folgt:

$$\int_{-1}^1 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1 \cdot e^x dx = \dots = \frac{2}{e}.$$

▷ Auch *unbestimmte Integrale*, also Integrale ohne Grenzen, können mit der partiellen Integration berechnet werden. Mit $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$ folgt $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = x$ und wir finden eine Stammfunktion des Logarithmus:

$$\int \ln(x) \cdot 1 dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \dots = x(\ln(x) - 1) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}. \quad \diamond$$

BEMERKUNG 6.11 Das Ziel der partiellen Integration ist also, ein schwieriges Integral auf ein Einfacheres zurückzuführen. Gelegentlich sind dazu mehrere Integrationsschritte notwendig. Nur die passende Wahl von f und g' im zu berechnenden Integral macht die partielle Integration zu einem nützlichen Verfahren. Die richtige Wahl benötigt ein geübtes Auge, denn wählt man falsch, so wird sich das Integral weiter verkomplizieren. Man muss immer die zu integrierende Funktion näher ansehen mit dem Wissen im Hinterkopf, dass sich Polynome beim Ableiten vereinfachen und beim Integrieren verkomplizieren, während sich bspw. exp, sin und cos beim Ableiten/Integrieren kaum ändern. ◀

Die Umkehrung der Kettenregel führt auf die *Substitutionsregel*.

SATZ 6.12 (SUBSTITUTIONSREGEL)

Seien $f \in \mathcal{C}(g((a, b)))$ und $g \in \mathcal{C}^1((a, b))$, dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy.$$

BEMERKUNG 6.13 Als “Merkregel” setzt man $y = g(x)$ und “ $dy = \frac{dy}{dx} dx = g'(x) dx$ ”. ◀

Beweis. Sei F Stammfunktion von f auf $g((a, b))$. Dann gilt gemäß Kettenregel:

$$(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt dann

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy. \quad \square$$

BEISPIEL 6.14 (ANWENDUNG DER SUBSTITUTIONSREGEL)

Mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = \cos x$ ist $g'(x) = -\sin x$ und damit

$$\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx = \int_0^\pi e^{g(x)}(-g'(x)) dx = - \int_{g(0)}^{g(\pi)} e^y dy = \int_{-1}^1 e^y dy = 2 \sinh 1.$$

Zur besseren Illustration betrachten wir noch ein weiteres Beispiel und lösen es so, wie man es in der Praxis machen würde.

BEISPIEL 6.15 (ANWENDUNG DER SUBSTITUTIONSREGEL – WENIGER FORMAL)

Wir interessieren uns für den Wert des Integrals $\int_0^2 x \cos(x^2 + 1) dx$.

1. *Substitution finden:* Da die Ableitung des Arguments des Cosinus im Integral nochmal auftaucht, substituieren wir $u(x) := x^2 + 1$.
2. *Substitution ableiten:* $\frac{du}{dx}(x) = 2x \quad \implies du = 2x dx \implies x dx = \frac{1}{2} du$.
3. *Grenzen substituieren:* $u(0) = 1$ und $u(2) = 5$.

$$4. \text{ Integrieren: } \int_0^2 x \cos(x^2 + 1) dx = \int_1^5 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \left[\frac{\sin u}{2} \right]_1^5 = \frac{\sin 5 - \sin 1}{2}. \quad \diamond$$

Ein nützliches Verfahren zur Integration rationaler Funktionen, nämlich die *Partialbruchzerlegung* wird dann in der Übung behandelt.

BEMERKUNG 6.16 (**Integrationstabelle**)

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$

All diese Beziehungen lassen sich natürlich durch Ableiten der Stammfunktion beweisen. ◀

6.3. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Zuletzt wenden wir uns den *uneigentlichen Integralen* zu. Anders als bei den bisher betrachteten Integralen lassen wir nun zu, dass die zu integrierende Funktion im Integrationsgebiet unbeschränkt wird oder das Integrationsgebiet selbst beliebig groß wird.



DEFINITION 6.17 (UNEIGENTLICHE RIEMANN-INTEGRIERBARKEIT)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$. $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **uneigentlich Riemann-integrierbar** über $[a, b)$, wenn

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx$$

existiert.

BEISPIEL 6.18 (WICHTIGE UNEIGENTLICHE INTEGRALE)

$$\begin{aligned} \triangleright \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{1}{x} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln y = \infty, \\ \text{aber } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y \frac{1}{x^2} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1. \\ \triangleright \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\lim_{y \rightarrow 0} \ln y = \infty, \\ \text{aber } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{y}) = 2. \end{aligned}$$

Es hängt also stark vom Integranden und vom Integrationsgebiet ab, ob das uneigentliche Integral existiert oder nicht. Häufig ist es nicht möglich, eine konkrete Stammfunktion des Integranden anzugeben. In diesen Fällen kann das *Majorantenkriterium für Integrale* helfen.

SATZ 6.19 (MAJORANTENKRITERIUM FÜR INTEGRALE)

Sind $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ mit $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, b]$. Konvergiert $\int_a^b g(x) dx$, dann konvergiert auch

$$\int_a^b f(x) dx.$$

BEMERKUNG 6.20 Satz 6.19 überträgt sich auch auf Intervalle der Form $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) . ◀

BEISPIEL 6.21 (ANWENDUNG DES MAJORANTENKRITERIUMS)

Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ ist konvergent, da $|\cos(x)| \leq 1 \forall x \in [1, \infty)$ und wegen

$$\text{Beispiel 6.18 gilt auch } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty. \quad \diamond$$

Mit dem Konzept der uneigentlichen Integrale können wir auch ein weiteres Konvergenzkriterien für Reihen formulieren.

SATZ 6.22 (INTEGRALVERGLEICHSKRITERIUM)

Ist $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend, dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert,

(ii) Das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(k) dk$ konvergiert.

BEMERKUNG 6.23

- ▷ Satz 6.22 liefert nur eine Konvergenzaussage! Aus der Konvergenz der Reihe folgt also die Konvergenz des uneigentlichen Integrals und umgekehrt. Daraus folgt aber im Allgemeinen noch nicht, dass auch die Grenzwerte von Reihe und Integral übereinstimmen.
- ▷ Uns interessiert in der Regel die Implikation (ii) \implies (i), da wir so aus der Konvergenz eines uneigentlichen Integrals die Konvergenz einer Reihe folgern können. Der Vorteil von uneigentlichen Integralen liegt darin, dass wir hier Stammfunktionen bilden können, was bei Reihen nicht möglich ist. ◀

KOROLLAR 6.24 (KONVERGENZ DER RIEMANNSCHEN ZETA FUNKTION FÜR $s > 1$)

Die **Riemannsche Zetafunktion**

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

konvergiert für $s > 1$.

Beweis. Da $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(k) = \frac{1}{k^s}$ monoton fallend ist, folgt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{k^s} dk = \frac{1}{1-s} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k^{s-1}} \right]_{k=1}^n = \frac{1}{1-s} \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{s-1}} \right) - 1 \right) \stackrel{s > 1}{<} \infty.$$

Die Behauptung folgt damit aus Satz 6.22. ◻

BEMERKUNG 6.25 Setzt man in Korollar 6.24 $s = 1$, so folgt die Divergenz der harmonischen Reihe unmittelbar, indem man im Beweis den Logarithmus als Stammfunktion von $\frac{1}{k}$ verwendet. ◀

7. FUNKTIONENFOLGEN

Wir haben uns bereits mit Zahlenfolgen und ihrer Konvergenz beschäftigt. Dieses Konzept weiten wir nun auf Folgen von Funktionen, sogenannten *Funktionenfolgen* aus. Dabei werden wir zwei neue Konvergenzbegriffe kennenlernen.



DEFINITION 7.1 (PUNKTWEISE & GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ)

Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, konvergiert ...

▷ **punktweise** gegen f , wenn $\forall x \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$,

▷ **gleichmäßig** gegen f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

BEMERKUNG 7.2

▷ Beide Konvergenzbegriffe lassen sich auch im ε -Kalkül ausdrücken:

$$- f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f \iff \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$$- f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

▷ Daraus folgt auch $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \implies f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f$. ◀

BEISPIEL 7.3 (TYPISCHE FUNKTIONENFOLGEN)

▷ $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

▷ $f_n : [0, q] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ mit $q \in (0, 1)$ konvergiert gleichmäßig, da

$$\sup_{x \in [0, q]} |f_n(x)| = q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

▷ $f_n : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ konvergiert jedoch nicht mehr gleichmäßig, da

$$\sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} x^n = 1.$$

Die folgenden Sätze werden uns zeigen, dass gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge sehr wünschenswert ist.

SATZ 7.4 (GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ \implies STETIGKEIT DER GRENZFUNKTION)

Konvergiert die stetige Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist auch f stetig.

BEMERKUNG 7.5 Damit ist das Resultat im dritten Beispiel eine Konsequenz aus der im ersten Beispiel gefundenen unstetigen Grenzfunktion f . ◀

SATZ 7.6 (VERTAUSCHBARKEITSSATZ)

Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion f , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Konvergiert die Funktionenfolge nicht mehr gleichmäßig, so ist auch die Vertauschbarkeit in Satz 7.6 nicht mehr garantiert, wie wir in folgendem Beispiel sehen werden.

BEISPIEL 7.7 (GEGENBEISPIEL ZUR VERTAUSCHBARKEIT)

Für $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$ ist $f(x) = 0$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} dx = 1 \neq 0 = \int_a^b f(x) dx.$$

SATZ 7.8 (DIFFERENTIATION VON FUNKTIONENFOLGEN)

Seien $f_n \in \mathcal{C}^1((a, b))$ und gilt

- (i) f_n konvergiert punktweise auf (a, b) gegen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,
- (ii) f'_n konvergiert gleichmäßig auf (a, b) gegen $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann ist auch $f \in \mathcal{C}^1((a, b))$ und es gilt $f'(x) = g(x) \forall x \in (a, b)$.

In Kapitel 3 haben wir uns bereits mit Potenzreihen beschäftigt. Diese sind letztlich auch nur Funktionenfolgen, nämlich Folgen von Partialsummen von Funktionen. Daher können wir diese an dieser Stelle nochmal diskutieren und zusätzliche Resultate behandeln.

SATZ 7.9 (GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ VON POTENZREIHEN)

Sei $P(z) :=$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R .

Dann konvergiert die Folge der Partialsummen $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ auf $U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ für jedes $r < R$ gleichmäßig gegen $P(z)$.

KOROLLAR 7.10 (DIFFERENTIATION UND INTEGRATION VON POTENZREIHEN)

Sei $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R .

Dann ist $P : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto P(x)$:

- (i) differenzierbar mit

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1},$$

- (ii) für alle $[a, b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$ Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left[(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1} \right].$$

SATZ 7.11 (LOGARITHMUS-REIHE)

Die *Logarithmus-Reihe* ist gegeben durch

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \text{für } |x| < 1.$$

Beweis. Die geometrische Reihe $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$ kann gemäß Korollar 7.10 (ii) für $|x| < 1$ gliedweise integriert werden. Das führt auf

$$\ln(1+x) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_0^x P(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \quad \square$$

8. FOURIERREIHEN

In diesem Kapitel gehen wir der Frage nach, wie wir periodische Funktionen durch andere Funktionen approximieren können. Ein ähnliches Konzept kennen wir bereits von den Taylorreihen, wo wir glatte Funktionen durch ihre Taylorreihe beschrieben haben. Jedoch erweisen sich Polynome nicht als geeignete Basisvektoren, deren Linearkombination ein periodisches Signal zufriedenstellend approximiert. Daher lernen wir den Begriff des *trigonometrischen Polynoms* kennen, welcher dafür optimal geeignet ist. Basierend auf diesem definieren wir dann die *Fourierreihe*³⁰.



DEFINITION 8.1 (*p*-PERIODIZITÄT)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **periodisch mit Periode** $p > 0$, oder kurz ***p*-periodisch**, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $f(x) = f(x + p)$.

Unser Ziel ist nun die Approximation periodischer Funktionen durch eine Linearkombination **trigonometrischer Polynome**

$$\sum_{k=-n}^n a_k e_k(x), n \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{C} \text{ mit } e_k(x) := e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

Um die Konstruktion einer sogenannten *Fourierreihe* besser zu verstehen, wiederholen wir nochmal den Begriff des *Skalarprodukts* aus der linearen Algebra.

DEFINITION 8.2 (SKALARPRODUKT AUF KOMPLEXEN RÄUMEN)

Ein **komplexes Skalarprodukt** ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V , so dass für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Folgendes gilt:

- (i) $\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$ (Linearität im zweiten Argument)
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (Hermitesität)
- (iii) $(\langle x, x \rangle \geq 0) \wedge (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$ (Positive Definitheit)

BEMERKUNG 8.3

- ▷ Für uns relevant ist der Fall, dass $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ und $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$. Man kann sich davon überzeugen, dass dies tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
- ▷ Bezüglich dieses Skalarprodukts bilden die $e_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem, d.h. $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{k,l}$, bezogen auf den Vektorraum $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$.
- ▷ Es ergibt sich dann folgende Analogie zwischen dem \mathbb{C}^n und $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$:

	\mathbb{C}^n	$\mathcal{C}([-\pi, \pi])$
Vektor	(v_1, \dots, v_n)	$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$
Orthonormalsystem	$e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 an der k -ten Stelle	$e_k = e^{ikx}$ $k \in \mathbb{Z}$
Skalarprodukt	$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{v_k} w_k$	$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$
Norm	$\ v\ _2 = \sqrt{\langle v, v \rangle}$	$\ f\ _2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

³⁰Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), französischer Mathematiker und Physiker.

DEFINITION 8.4 (FOURIERRREIHE)

▷ $\hat{f}(k) := \langle e_k, f \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$ heißt **k -ter Fourierkoeffizient** von f .

▷ Die Funktionenfolge trigonometrischer Polynome, $s_n(x) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e_k(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ die **Fourierreihe** von f :

$$F_f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e_k(x).$$

BEMERKUNG 8.5 Konvergiert die Fourierreihe F_f gegen die Funktion f , so hat sie genau die Form $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k, f \rangle e_k$, also genau die Darstellung von f als ‘‘Summe’’ von Basisvektoren e_k . Tatsächlich ist der hier zugrundeliegende Vektorraum, anders als in der linearen Algebra, unendlichdimensional. All dies wird in der Analysis 3 im Rahmen der Hilbertraumtheorie vertieft. ◀

Weist die zu entwickelnde Funktion Symmetrien auf, so bietet sich eine alternative ‘‘anschaulichere’’ Darstellung der Fourierreihe mit den sogenannten *Sinus-* und *Cosinuskoeffizienten* an.

SATZ 8.6 (SINUS-COSINUS-DARSTELLUNG DER FOURIERRREIHE)

Die Fourierreihe $F_f(x)$ einer Funktion $f \in \mathcal{R}([a, b])$ lässt sich schreiben als

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

mit den Fouriercosinuskoeffizienten $a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ und den Fouriersinuskoeffizienten

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

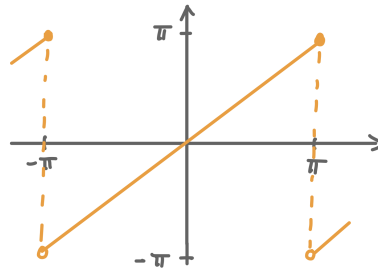
BEMERKUNG 8.7 Offenbar gilt $a_k = 0$ für ungerades f und $b_k = 0$ für gerades f . ◀

BEISPIEL 8.8 (SÄGEZAHNSIGNAL)

Wir betrachten die Funktion

$$f : (\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x.$$

Diese ist ungerade, womit $a_k = 0$ ist.



Für b_k ergibt sich

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{x} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{-\frac{2}{k} \cos(kx)}_{=-\frac{2}{k} (-1)^k} + \underbrace{\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \right).$$

Damit ist

$$F_f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx) = -\frac{2}{\pi} \left(-\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{3} \sin(3x) \pm \dots \right). \quad \diamond$$

LEMMA 8.9 (RIEMANN-LEBESGUE-LEMMA)

Für $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ gilt $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$.

SATZ 8.10 (ALGEBRAISIERUNG DER ABLEITUNG)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n -mal stetig differenzierbar und 2π -periodisch. Dann gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n \hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Wir beweisen den Fall $n = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann durch Induktion.

$$2\pi \hat{f}'(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f'(x) dx \stackrel{\text{p.I.}}{=} \underbrace{[e^{-ikx} f(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=(-1)^k (f(\pi) - f(-\pi)) = 0} + ik \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx = 2\pi ik \hat{f}(k). \quad \square$$

BEMERKUNG 8.11 Das Konzept der Fourierreihe wird in der Analysis 3 auf nichtperiodische Basisfunktionen verallgemeinert (Fouriertransformation). Das Konzept der Algebraisierung der Ableitung ist dann zum Lösen diverser Differentialgleichungen sehr hilfreich, da so aus Ableitungen multiplikative Faktoren werden. Z.B. wird dann aus der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(t, x) \xrightarrow{\text{Fouriertrafo bzgl. } x} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t, k) = -Dk^2 \hat{\rho}(t, k).$$

Dies ist nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung in t , welche mit *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. So erhält man $\hat{\rho}(t, k)$ und *Fourierrücktransformation* liefert dann $\rho(t, x)$. ◀

SATZ 8.12 (RELATION VON PARSEVAL³¹)

Für $f, g \in \mathcal{R}([-\pi, \pi])$ gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) \quad \text{und damit insbesondere} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

KOROLLAR 8.13 (BASLER PROBLEM)

Der Wert der $\frac{1}{k^2}$ -Reihe ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Parseval auf $f(x) = x$ an:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für die Auswertung der linken Seite berechnen wir die Fourierkoeffizienten von f und erhalten

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \begin{cases} \frac{i(-1)^k}{k}, & k \neq 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Damit gilt durch Zerlegung der Reihe offenbar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{-1} |\hat{f}(k)|^2 + |\hat{f}(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad \square$$

³¹Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836), französischer Mathematiker.

Zuletzt diskutieren wir noch die Konvergenz von Fourierreihen. Dies geschieht natürlich im Kontext von Funktionenfolgen, da es sich bei Fourierreihen genau um Grenzwerte von Funktionenfolgen handelt.

SATZ 8.14 (PUNKTWEISE KONVERGENZ VON FOURIERREIHEN)

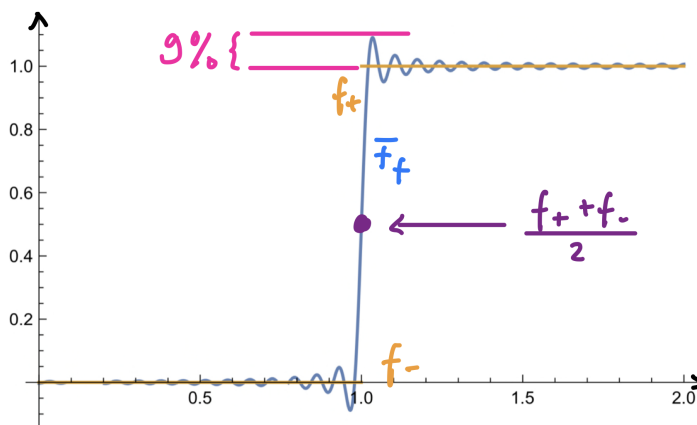
Sei $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ 2π -periodisch und in einer Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Dann konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e_k(x) = f(x).$$

BEMERKUNG 8.15 Die bloße Stetigkeit von f wird im Allgemeinen nicht ausreichen. Die Konstruktion von Gegenbeispielen hierzu ist jedoch nicht trivial. ◀

SATZ 8.16 (GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ VON FOURIERREIHEN)

- ▷ In der Umgebung von Sprungstellen liegt nie gleichmäßige Konvergenz vor. Dort tritt das ‘‘Gibbsche Phänomen’’ auf; Es entstehen Schwingungen, die $\approx 9\%$ der Sprunghöhe ausmachen. Dies führt zu Artefakten in Bildbearbeitung und Elektronik.



- ▷ Ist $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ stückweise stetig differenzierbar und existieren an der Stelle x die Grenzwerte $f_{\pm} := \lim_{t \rightarrow 0} f(x \pm t)$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{f_+ + f_-}{2}.$$

SATZ 8.17 (APPROXIMATIONSSATZ)

Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ eine 2π -periodische Funktion. Dann existiert eine Folge trigonometrischer Polynome, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

BEMERKUNG 8.18

- ▷ Das alles lässt sich stark verallgemeinern. Der *Satz von Stone-Weierstraß* besagt, dass jede stetige Funktion durch einfachere Funktionen (auch gewöhnliche Polynome) beliebig gut approximiert werden kann.
- ▷ Der für die Fourierreihe günstigste Konvergenzbegriff ist die *Konvergenz im quadratischen Mittel*. Hier wird gefordert, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ gilt. Dies werden wir hier nicht weiter vertiefen. ◀

9. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt wenden wir uns den linearen Differentialgleichungen zu. Differentialgleichungen tauchen in der Physik überall auf.

- ▷ Klassische Mechanik → Newtonsche³² Bewegungsgleichung/Euler-Lagrange-Gleichungen
- ▷ Elektrodynamik → Maxwell³³-Gleichungen
- ▷ Quantentheorie → Schrödingergleichung³⁴
- ▷ Statistische Physik → Liouville³⁵-Gleichung/von Neumann³⁶-Gleichung
- ▷ Allgemeine Relativitätstheorie → Einsteinsche³⁷ Feldgleichungen

9.1. GRUNDBEGRIFFE UND REDUKTION DER ORDNUNG

Wir definieren zunächst formal, was wir unter einer Differentialgleichung verstehen.

DEFINITION 9.1 (GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNG)

- ▷ Eine **gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- ▷ Eine **gewöhnliche, lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung** lässt sich schreiben als

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = b(t)$$

mit der **Inhomogenität** $b(t)$.

Wir konzentrieren unsere weiteren Betrachtungen auf den linearen Fall. Glücklicherweise lassen sich lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung immer auf Systeme von n Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren. Es genügt also, die Lösungstheorie nur für Gleichungen erster Ordnung zu formulieren. Der folgende Satz zeigt, wie diese Reduktion der Ordnung funktioniert.

SATZ 9.2 (REDUKTION AUF SYSTEME 1. ORDNUNG)

Die Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = b(t)$$

ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t),$$

wobei $A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

³² Sir Isaac Newton (1643-1727), englischer Physiker, Astronom und Mathematiker.

³³ James Clerk Maxwell (1831-1879), schottischer Physiker.

³⁴ Erwin Schrödinger (1887-1961), österreichischer Physiker.

³⁵ Joseph Liouville (1809-1882), französischer Mathematiker.

³⁶ John von Neumann (1903-1957), ungarisch-US-amerikanischer Mathematiker.

³⁷ Albert Einstein (1879-1955), deutscher Physiker.



BEISPIEL 9.3 (GETRIEBENER, GEDÄMPFTER, HARMONISCHER OSZILLATOR MIT ANTRIEB)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t).$$

Diese beschreibt einen harmonischen Oszillator, wobei $\beta > 0$ die *Dämpfungs-konstante*, $\omega_0 > 0$ die *Eigenfrequenz* und $F(t)$ eine *äußere Antriebskraft* ist. Mit dem Satz zur Reduktion der Ordnung können wir diese Differentialgleichung in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung transformieren. Dazu führen wir die Variablen x und v ein:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Bevor wir uns mit der konkreten Lösung solcher Systeme auseinandersetzen, benötigen wir ein paar Zutaten aus der linearen Algebra.

9.2. OPERATORNORM FÜR MATRIZEN UND MATRIX-EXPONENTIALFUNKTION

Um solche Differentialgleichungssystem lösen zu können, müssen wir den Begriff der eindimensionalen Exponentialfunktion ausbauen.



DEFINITION 9.4 (NORM & NORMIERTER RAUM)

- ▷ Eine **Norm** auf einem Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass
 - (i) $\forall x \in V : \|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)
 - (ii) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
 - (iii) $\forall x \in V \forall c \in \mathbb{K} : \|cx\| = |c|\|x\| \iff x = 0$ (Homogenität)
- ▷ Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann ein **normierter Vektorraum**.

BEISPIEL 9.5 (WICHTIGE VEKTORRÄUME)

- ▷ Ein *euklidischer Vektorraum* ist definiert als $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ mit $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- ▷ Ein *unitärer Vektorraum* ist definiert als $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ mit $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$. ◇

Wir werden im folgenden vor allem mit Matrizen arbeiten. Daher benötigen wir auch eine geeignete Norm auf dem Raum der komplexen $n \times n$ -Matrizen, z.B. die *Operatornorm*.

DEFINITION 9.6 (OPERATORNORM)

Die **Operatornorm** auf dem $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \|A\| := \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Damit können wir nun die *Matrix-Exponentialfunktion* definieren, welche das Konzept der eindimensionalen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf eine Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ verallgemeinert. Mit ihr können wir Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung lösen.

DEFINITION 9.7 (MATRIX-EXPONENTIALFUNKTION)

Die **Matrix-Exponentialfunktion** $\exp(A)$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

wobei $A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$ das k -fache Matrixprodukt und $A^0 := \mathbb{1}$ die Einheitsmatrix sein soll.

SATZ 9.8 (EIGENSCHAFTEN DER MATRIX-EXPONENTIALFUNKTION)

(i) $e^A := \exp(A)$ konvergiert bzgl. der Operatornorm absolut und gleichmäßig auf jedem Ball $B_r := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} : \|M\| < r\}$ mit $r > 0$.

(ii) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt

$$[A, B] := AB - BA = 0 \implies \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

$[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichnet hierbei den **Kommutator**.

(iii) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ ist komponentenweise stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A.$$

Neben den Eigenschaften interessieren uns beim Lösen von Differentialgleichungen auch konkrete Berechnungsmöglichkeiten für die Matrix-Exponentialfunktion.

SATZ 9.9 (BERECHNUNG DER MATRIX-EXPONENTIALFUNKTION)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(i) Für $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ gilt $\exp(A) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.

(ii) Für diagonalisierbares A existiert eine Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass $A = S \text{diag}(a_1, \dots, a_n) S^{-1} =: SDS^{-1}$, wobei

▷ a_1, \dots, a_n die Eigenwerte von A sind,

▷ $S = (v_1 \dots v_n)$ eine reguläre Matrix mit einer Orthonormalbasis³⁸ von Eigenvektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ zu den Eigenwerten a_1, \dots, a_n ist.

Dann gilt

$$\exp(A) = S \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}) S^{-1}.$$

Beweis. Wegen $(SDS^{-1})^n = SD \underbrace{S^{-1}S}_{=\mathbb{1}} DS^{-1} \dots SDS^{-1} = SD^n S^{-1}$ ist

$$\exp(A) = \exp(SDS^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^n}{n!} = S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} S^{-1} = S \exp(D) S^{-1}. \quad \square$$

³⁸Die Wahl einer Orthonormalbasis ist nicht notwendig, erspart dann aber das aufwendige Invertieren, da dann $S^{-1} = \overline{S}^T$ gilt.

- (iii) Für eine nicht diagonalisierbare Matrix A lässt sich A mit den Methoden der linearen Algebra³⁹ stets in eine "Jordan⁴⁰-Normalform" überführen.

Für einen Jordan-Block der Form $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt dann für alle

$t, \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\exp(tJ) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 9.10 (KONKRETE BEISPIELE IM $\mathbb{R}^{2 \times 2}$)

▷ Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann folgt mit Satz 9.9 (i) unmittelbar $\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

▷ Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wir interessieren uns für $\exp(tA)$.

A ist diagonalisierbar und wir können Satz 9.9 (ii) anwenden. A hat die Eigenwerte $a_{1,2} = \pm 1$ mit zugehöriger ONB aus Eigenvektoren $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $A = SDS^T$ mit der Orthogonalmatrix $S = (v_1 \ v_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(a_1, a_2)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= S \exp(tD) S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▷ Sei nun $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir interessieren uns wieder für $\exp(tA)$. A liegt offenbar in Jordan-Normalform mit $\lambda = -1$ vor. Damit ist gemäß Satz 9.9 (iii)

$$\exp(tA) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

³⁹Für die Konstruktion einer Jordan-Normalform verweisen wir hier auf die Literatur zur linearen Algebra.

⁴⁰Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), französischer Mathematiker.

9.3. LÖSUNG HOMOGENER SYSTEME

SATZ 9.11 (LÖSUNG HOMOGENER SYSTEME)

- ▷ Die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{tA}x(0) \text{ mit } x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

- ▷ $x(t)$ ist dann die eindeutige Lösung des **Anfangswertproblems (AWP)**

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen komplexen Vektorraum \mathcal{L} .

DEFINITION 9.12 (LÖSUNGSFUNDAMENTALSYSTEM)

Jede Basis von \mathcal{L} heißt **Lösungsfundamentalsystem**.

SATZ 9.13 (BESCHRÄNKTHEIT DER DIMENSION DES LÖSUNGSRAUMS)

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist stets $\dim(\mathcal{L}) \leq n$.

wir beschäftigen uns nun mit der Konstruktion von Lösungen einer homogenen Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = 0 \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{C}.$$

DEFINITION 9.14 (CHARAKTERISTISCHES POLYNOM)

Man nennt

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = 0.$$

BEMERKUNG 9.15 Es gilt $\chi(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{1} - A)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die im Satz zur Reduktion der Ordnung (Satz 9.2) definierte Matrix ist. Die Lösungsmenge von $\chi(\lambda) = 0$ liefert also genau die Eigenwerte von A . ◀

Der folgende Satz liefert nun konkrete Lösungen der homogenen Gleichung.

SATZ 9.16 (LÖSUNGSNORMALFORM)

Sei k_j die algebraische Vielfachheit der Nullstelle λ_j des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^p (\lambda - \lambda_j)^{k_j}$. Dann ist die Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = 0$$

von der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^{k_j} c_{jm} t^{m-1} e^{\lambda_j t} \quad \text{mit } c_{jm} \in \mathbb{C}.$$

BEISPIEL 9.17 (LÖSUNG EINER HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG 2. ORDNUNG)

Wir betrachten die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$. Diese hat das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Damit ist $\lambda_1 = -1, k_1 = 2$ und $p = 1$ (da wir nur einen Linearfaktor haben). Also gilt für die Lösung:

$$x(t) = \sum_{j=1}^1 \sum_{m=1}^{k_j} c_{jm} t^{m-1} e^{\lambda_j t} = \sum_{m=1}^2 c_{1m} t^{m-1} e^{\lambda_1 t} = \sum_{m=1}^2 c_{1m} t^{m-1} e^{-t} = c_{11} e^{-t} + c_{12} t e^{-t}.$$

Damit folgt $\mathcal{L} = \text{span}(\{e^{-t}, te^{-t}\})$. ◇

BEMERKUNG 9.18 Doppelte Nullstellen im charakteristischen Polynom einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung führen also auf Lösungen der Form $x(t) = (a + bt)e^{\alpha t}$ mit der Nullstelle $t_0 = -\frac{a}{b}$. Beschreibt die Differentialgleichung einen harmonischen Oszillator, so handelt es sich hier um eine "kritische Dämpfung" mit einem Durchgang durch die Ruhelage zum Zeitpunkt t_0 . ◀

9.4. INHOMOGENE SYSTEME

Nun betrachten wir noch kurz den Fall $b(t) \neq 0$.

SATZ 9.19 (VARIATION DER KONSTANTEN FÜR SYSTEME 1. ORDNUNG)

Die Lösung der inhomogenen Gleichung $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b(t) \in \mathbb{R}^n$ und $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$x(t) = \underbrace{\exp(tA)x_0}_{\text{Lösung der homogenen Gleichung}} + \underbrace{\exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)b(s) ds}_{\text{Lösung der inhomogenen Gleichung}}.$$

BEMERKUNG 9.20 Dieses Lösungsverfahren kann recht rechenintensiv werden. Gelegentlich empfiehlt es sich, die Inhomogenität $b(t)$ scharf anzusehen, und für das Auffinden der Lösung der inhomogenen Gleichung einen geeigneten Lösungsansatz auszuprobieren. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. ◀

BEISPIEL 9.21 (LÖSUNG EINER INHOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG)

Wir wollen auf möglichst unkompliziertem Wege eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) + x(t) = 42$ finden.

- ▷ Zunächst lösen wir die homogene Gleichung $\dot{x}(t) + x(t) = 0$ und finden $x(t) = \alpha e^{-t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ▷ Für die Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $x(t) = 42$. Dieser löst offenbar die Differentialgleichung und ist damit eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- ▷ Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich (immer!) durch Addition von homogener und inhomogener⁴¹ Lösung und wir erhalten $x(t) = \alpha e^{-t} + 42$. ◇

⁴¹Die Lösung der inhomogenen Gleichung wird gelegentlich als *partikuläre Lösung* bezeichnet.

A. WICHTIGE HINWEISE ZUM BEWEISEN UND RECHNEN BEI ÜBUNGSAUFGABEN UND KLAUSUREN

Der Text in diesem Anhang wurde im Wesentlichen von Franz Merkl erstellt, und enthält einige Abänderungen meinerseits.

Der folgende Text soll Ihnen Hinweise geben, wie Sie sehr häufige Anfängerfehler beim Beweisen und Rechnen vermeiden können. Die Berücksichtigung dieser Hinweise hilft Ihnen nicht nur bei dieser Vorlesung, sondern bei Ihrem gesamten weiteren Studium!

▷ **Präzise und klare Argumentation in ganzen deutschen Sätzen.**

Beweise bestehen aus logisch argumentierenden *vollständigen deutschen Sätzen*, die mit mathematischen Formeln angereichert sind.

Eine bloße Aneinanderreihung von Formeln ist kein Beweis.

Falsche Logik oder gar fehlende logische Argumentationen sind schwere Fehler; sie führen in der Klausur zu hohem Punktabzug, in schweren Fällen sogar zum Totalverlust aller Punkte der betroffenen Aufgabe. Argumentieren Sie also präzise und klar!

▷ **Bewusstsein über das sich verändernde Beweisziel.**

Seien Sie sich beim Beweisen bewusst, was an jeder Stelle das momentane Beweisziel, *die Behauptung* ist. Sie sollen dies an wichtigen Stellen im Beweis dokumentieren, z.B. im Stil: „Zu zeigen ist hier: $\langle \text{Aussage} \rangle$ “ oder „Wir zeigen nun: $\langle \text{Zwischenbehauptung} \rangle$ “. Das Beweisziel ändert sich im Verlauf des Beweises so lange, bis nichts mehr davon übrig ist. Dokumentieren Sie die logische Struktur des Beweises. Markieren Sie das Beweisende, z.B. mit den Worten „Das war zu zeigen“ oder kurz z.B. mit “ \square ” oder klassisch mit “q.e.d.” (“quod erat demonstrandum”).

▷ **Bewusstsein und Dokumentation zu gegebenen Aussagen.**

Machen Sie sich bewusst, welche relevanten Aussagen an der jeweiligen Stelle im Beweis gegeben sind, sei es durch Voraussetzungen, durch Annahmen in den vorhergehenden Beweisteilen oder durch bereits bewiesene Zwischenbehauptungen. An wichtigen Stellen sollen Sie das auch im Beweistext dokumentieren, z.B. Mit den Worten “Wegen $\langle \text{Formelnummer} \rangle$ wissen wir $\langle \text{Aussage} \rangle$ ” oder “Gegeben ist $\langle \text{Aussage} \rangle$ ”. Besonders wichtig sind solche Dokumentationen am Beweisanfang, am Beweisende und bei Zäsuren im Beweis, an denen Aussagen als neu gegeben hinzukommen, zum Beispiel durch die Einführung von Annahmen.

▷ **Bewusstsein und Dokumentation zu gegebenen Objekten.**

Seien Sie sich darüber bewusst, welche Variablen an der jeweiligen Beweisstelle gegeben sind! Die Einführung neuer Variablen muss dokumentiert werden, z.B. mit den Worten: “Es sei $\langle \text{Variable} \rangle$ mit $\langle \text{Typspezifikation} \rangle$ gegeben”. Klassisches Beispiel hierzu: “Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben” oder stark verkürzt: “Sei $\varepsilon > 0$ ”. Die Einführung einer Variablen kann auch mit den folgenden Worten geschehen: “Wir wählen $\langle \text{Variable} \rangle := \langle \text{Term} \rangle$ ”; klassisches Beispiel: “Wir wählen $\delta := \dots$ ”.

Nicht als gegeben eingeführte Variablen müssen *gebunden* werden.

Die Bindung von Variablen geschieht meist mit Quantoren (oder gleichbedeutenden Worten). Sehr häufig braucht man hier die Allquantisierung: “Es gilt $\phi(x)$ für alle x mit $\langle \text{Typangabe} \rangle$ ” oder auch “ $\forall x \langle \text{Typangabe} \rangle : \phi(x)$ ”, sehr stark verkürzt manchmal auch nur z.B. “Es gilt $\phi(k), k = 1, \dots, n$ ” als Abkürzung für “Es gilt $\phi(k)$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ”.

Eine Existenzquantifizierung kann ebenfalls abgekürzt geschrieben werden, zum Beispiel “Es gilt $\phi(k)$ für geeignetes $k = 1, \dots, n$ ” als Abkürzung für “Es existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\phi(k)$ ”. Auch manche anderen Symbole *binden* Variablen. Zum Beispiel ist die Variable k im Term $\sum_{k=1}^n f(k)$ gebunden, die Variable n und das Funktionssymbol f sind jedoch

darin frei. Ebenso ist die Variable x im Term $\int_a^b f(x) dx$ gebunden, die Variablen a und b und die Funktionsvariable f sind jedoch darin frei. Auch die Mengennotation bindet Variablen: Zum Beispiel ist die Variable x im Mengenterm $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ gebunden; die Variablen a und b sind jedoch darin frei.

Nicht eingeführte freie Variablen sind ein häufiger schwerer Fehler.

▷ **Seien Sie kritisch gegenüber Ihren eigenen Rechnungen!**

Führen Sie laufend Konsistenzchecks aus: Prüfen Sie zum Beispiel einfache Spezialfälle (z.B. Variablen gleich 0 oder 1 einsetzen, wenn sinnvoll). Werte von bestimmten Integralen reeller Funktionen müssen wieder reell sein, Vektoren kann man nicht mit Zahlen addieren, Prüfen Sie, ob das Ergebnis konsistent mit Ihrer anschaulichen Erwartung ist. Auch in der Klausur ist das keine verschwendete Zeit! Auf diese Weise kann man nämlich die meisten Rechenfehler schon früh entdecken. Manchmal sieht man in Klausurbearbeitungen schon am Beginn der Rechnung eine Folge von Rechenfehlern, die den Sinn der Aufgabe völlig entstellen, die aber mit einfachen Konsistenzchecks leicht zu finden gewesen wären. Manchmal führen solche Fehler in der Klausur leider zu seitenlangen sinnlosen Rechnungen, die 0 Punkte wert sind, aber viel wertvolle Zeit verschwenden.

▷ **Verwenden Sie Funktionen nicht außerhalb ihres Definitionsbereichs!**

Ein klassischer Fehler zum Beispiel die Division durch 0.

▷ **Erfinden Sie keine falschen Rechenregeln!**

Brüche werden addiert, indem man sie durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann die Zähler addiert. Transzendente Funktionen wie \sin , \cos , \exp und \ln sind nicht linear; außer in seltenen Ausnahmen gilt also z.B. $e^{ab} \neq e^a e^b$ für reelle Zahlen a und b . Lassen Sie nicht einfach “lästige” Terme in Rechenregeln weg! Solche schweren Anfängerfehler führen nicht selten zu 0 Punkten bei der betroffenen Klausuraufgabe.

B. AUSFÜHRLICHES BEISPIEL ZU EINEM ε -BEWEIS

Beweise zur Konvergenz von Zahlenfolgen werden nicht selten als schwierig empfunden. Um eventuelle Probleme mit diesem Thema zu mildern, sollen im Folgenden einmal gezeigt werden, dass eine konkrete Folge ($a_n = \frac{1}{n^k}, k \in \mathbb{N}$) gegen ihren Grenzwert konvergiert. Danach wird für die selbe Folge noch einmal gezeigt, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

▷ **Beweis der Konvergenz gegen 0.**

Der erste Schritt, um Konvergenz gegen einen Grenzwert zu zeigen, benötigt tatsächlich etwas mathematische Intuition. Man plottet sich die Folge als stetige Funktion in einem geeignetem Programm⁴² oder hat auch ohne Hilfsmittel schon eine Vermutung, welchen Wert die Folge für große $n \in \mathbb{N}$ hat. Bei dieser simplen Folge ist hoffentlich klar, dass diese den Grenzwert 0 haben wird. Das Ziel eines solchen ε -Beweises ist es nun, genau diese intuitive Vermutung zu festigen. Gelegentlich führt einen das Gefühl auch auf Irrwege und dann ist man auf ordentliche mathematische Methoden angewiesen.

(1) *Wie kommt man auf den Beweis?*

In Lehrbüchern und Skripten wird in der Regel der fertige Beweis präsentiert. Die vorher stattfindende Vorarbeit ist jedoch nötig, um die Beweisidee zu finden.

Dazu verwenden wir zunächst die Definition der Konvergenz und setzen ein, was wir haben. Also die Folge und den vermuteten Grenzwert:

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^k} \right| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon.$$

Stellen wir das nun um, um eine Bedingung für n zu finden⁴³:

$$\frac{1}{n^k} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon \cdot n^k \iff \sqrt[k]{1} < n \iff \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} < n.$$

Es muss also ein N mit $N > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ gewählt werden.

(2) *Nun der konkrete Beweis.*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen wir nun ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $N > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ ist. Sei außerdem $n \geq N$ beliebig. Dann ist

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n^k} \right| = \frac{1}{n^k} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{\sqrt[k]{N}} < \varepsilon.$$

$$(*) : n \geq N \iff \sqrt[k]{n} \geq \sqrt[k]{N} \iff \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{N}}. \quad \square$$

▷ $\frac{1}{n^k}$ ist eine Cauchy-Folge.

Um zu zeigen, dass eine Folge eine Cauchy-Folge ist, ist es nicht notwendig, den Grenzwert im Vorfeld zu kennen. Wir vergessen also wieder, dass die Folge den Grenzwert 0 hat.

(1) *Wie kommt man auf den Beweis?*

Wir gehen wieder wie eben vor und verwenden dieses Mal die Definition der Cauchy-Folge:

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k} \right| = \left| \frac{n^k - m^k}{m^k n^k} \right|.$$

⁴²Mathematica, GeoGebra o.ä.

⁴³Das würde bei divergenten Folgen bereits scheitern. Würden wir bspw. zeigen wollen, dass $n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so wäre der umzustellende Ausdruck von der Form $n^k < \varepsilon \iff n < \sqrt[k]{\varepsilon}$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein, also bspw. $\varepsilon = 0, 1$, gewählt werden kann, wäre $n < \sqrt[k]{0, 1} < 1$ was aufgrund von $n \in \mathbb{N}$ nicht möglich ist.

Da wir n und m beliebig wählen können, sei nun $n \geq m > N$ (wie in Beispiel 2.8 für den Fall $k = 1$). Denn dann können wir $n^k - m^k \leq n^k$ abschätzen und erhalten eine untere Schranke für N :

$$\left| \frac{n^k - m^k}{m^k n^k} \right| \leq \frac{n^k}{m^k n^k} = \frac{1}{m^k} < \frac{1}{N^k} < \varepsilon \iff N > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}.$$

(2) *Nun der konkrete Beweis.*

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $n \geq m > N$ beliebig und außerdem sei $N > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$. Denn dann folgt mit der Definition der Cauchy-Folge:

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k} \right| = \left| \frac{n^k - m^k}{m^k n^k} \right| \leq \frac{n^k}{m^k n^k} = \frac{1}{m^k} < \frac{1}{N^k} < \varepsilon. \quad \square$$

LITERATUR

- [1] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1*. 6. Aufl. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2004
- [2] HELL, Tobias ; OSTERMANN, Alexander: *Analysis 1*. Vorlesungsskript, Universität Innsbruck, 2019, abrufbar unter https://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/hell/pdfs/skripten/analysis1_ws19.pdf