Wichtige Matrizen

Tom Kermer

February 2022

1 Reguläre Matrix

1.1 Eigenschaften und Definitionen

1. Determinante $\neq 0$
2. Spaltenrang = Zeilenrang = n
3. Zeilen und Spalten linear unabhängig
4. Es existiert eine Inverse
5. Alle Eigenwerte $\neq 0$

(Bilden eine Gruppe die mit $GL_n(\mathbb{K})$ bezeichnet wird)

2 Dreicksmatrix

2.1 Definiton

Die Eintrage sind über oder unter der Diagonalen alle gleich 0.

2.2 Eigenschaften

1. Die Determinante ist das Produkt der Diagonaleinträge
2. Die Eigenwerte sind die Diagonaleinträge

Die Diagonalmatrix ist ein Spezialfall der Dreiecksmatrix für die Zusätzlich gilt:

$$A = diag(a_1, a_2, ...a_n) \rightarrow A^{-1} = diag(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ...\frac{1}{a_n}) \tag{1}$$

Falls alle $a_i \neq 0$

3 Idenpotente Matrix

3.1 Definition

$A * A = A$

3.2 Eigenschaften

1. Determinante = 1 oder 0
2. $\exp(A)_{ij} = \exp(A_{ij})$ für i = j $\quad \exp(A)_{ij} = exp(A_{ij}) - 1$ sonst
3. Diagonalisierbar
4. Eigenwerte 0 oder 1

4 Nilpotente Matrix

4.1 Definition

$A^k = 0$ für ein k $\in \mathbb{N}$

4.2 Eigenschaften

1. Determinante = 0
2. ALLE Eigenwerte = 0
3. Nicht diagonalisierbar insofern A nicht die Nullmatrix ist
4. Spur = 0

5 Selbstinverse Matrix

5.1 Definition

$A * A = I_n$

5.2 Eigenschaften

1. Determinante = 1 oder -1

6 Orthogonale Matrix

6.1 Definition

Die Zeilen bzw Spalten sind orthonormal bezüglich dem Standartskalarprodukt. (Wichtig: Auch wenn die Matrix ORTHOGONAL heißt müssen die Spalten ORTHONORMAL sein)

6.2 Eigenschaften

1. Determinante = 1 oder -1
2. $A^{-1} = A^T$
3. Das (Standard)-Skalarprodukt ist invariant wenn beide Vektoren mit der Matrix multipliziert werde. Also:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle A * v_1, A * v_2 \rangle \quad ||v_1|| = ||A * v_1|| \tag{2}$$

Es können aus den orthogonalen Matrizen 3 Gruppen gebildet werden: $O(n)$ sind alle Orthogonalen Matrizen, $SO(n)$ sind alle Orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 (Entspricht Drehungen im $\mathbb{R}^n$) und $O(n)/SO(n)$ sind alle Orthogonalen Matrizen mit Determinante -1 (Entspricht Drehungspiegelungen im $\mathbb{R}^n$). Man nennt $O(n)$ die orthogonale Gruppe und $SO(n)$ die spezielle Orthogonale Gruppe.

7 Unitäre Matrix

Gleiche Definition und Eigenschaften wie bei der Orthogonalen Matrix bloß $A^{-1} = A^H$.

Die entsprechenden Gruppen nennt man: $U(n)$, $SU(n)$ und $U(n)/SU(n)$. $U(n)$wird meist unitäre und $SU(n)$, spezielle unitäre Gruppe genannt.

8 Symetrische Matrix

8.1 Definition

$A_{ij} = A_{ji} \quad A = A^T$ Die Matrix sieht über der Diagonalen und unter der Diagonalen gleich aus. Die Einträge auf der Diagonalen sind egal.

8.2 Eigenschaften

1. unitär Diagonalisierbar (siehe Normale Matrix)
2. Alle Eigenwerte Reell (Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oder $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

9 Hermetische Matrix

9.1 Definition

$A_{ij} = \bar{A}_{ji} \quad A = A^H$ Die Matrix sieht über der Diagonalen und unter der Diagonalen gleich aus bis auf komplexe Konjugation. Die Einträge auf der Diagonalen müssen reell sein.

9.2 Eigenschaften

1. unitär Diagonalisierbar (siehe Normale Matrix)
2. Alle Eigenwerte Reell

10 Antisymetrische Matrix (manchmal auch Schiefsymetrisch genannt)

10.1 Definition

$A_{ij} = -A_{ji}$ $A^T = -A$ Die Matrix sieht über der Diagonalen und unter der Diagonalen bis auf ein Vorzeichen gleich aus. Die Einträge auf der Diagonalen müssen 0 sein.

10.2 Eigenschaften

1. Determinante = 0 für n ungerade

11 Zusatz: Normale Matrix

11.1 Definition

$A * A^H = A^H * A$ Die Matrix kommutiert mit seiner herimtesch transponierten. Dazu gehören: Nr 6 - 10. Fasst alle Matrizen die man in der Praxis behandelt fallen in eine dieser Kategorien muss sie aber nicht. Es ist auch möglich, dass die Matrix "zufällig" normal ist.

Für euch ist nur der Spezialfall der Symmetrischen Matrix wichtig.

11.2 Eigenschaften

Es gilt der Spektralsatz.
1. unitär Diagonalisierbar
2. Alle Eigenwerte Reele für A hermitesch oder symmetrisch