Technische Universität München
Ferienkurs Mathematik für Physiker 1
(2021/2022)
Probeklausur

Yigit Bulutlar

25. März 2022

Aufgabe 1 (8 × 1,5 Punkte) In den folgenden Teilaufgaben sind die Ergebnisse ohne Begründung anzugeben. Nebenrechnungen werden nicht gewertet.

(a) Seien $v = \left(\begin{smallmatrix}-1\\3\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $w = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\-4\end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie vw^T und dessen Rang.

<u>**Lösung:**</u>

$$vw^T = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\6 & 0 & -12\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} -3(II) \to \begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies \text{hat Rang 1.}$$

(b) Schreiben Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\3 & 7 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 6\end{pmatrix}$ in Zykelschreibweise.

<u>**Lösung:**</u>

$\sigma = (1,3,4)(2,7,5,8,6)$

(c) Finden Sie eine Basis des Bildes der komplexen Matrix $\begin{pmatrix}-1 & i\\4i & 4\end{pmatrix}$

<u>**Lösung:**</u>

$$\begin{pmatrix}-1 & i\\4i & 4\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-1 & 4i\\i & 4\end{pmatrix}_{+i(I)} \to \begin{pmatrix}-1 & 4i\\0 & 0\end{pmatrix} \implies B_{\text{Bild}} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\4i\end{pmatrix}\right\}$$

(d) Bestimmen Sie die Inverse Matrix zu $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\-1 & -1 & 0\\-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

<u>**Lösung:**</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (II) \\ (III) \\ (I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ -2(I) \\ +2(I) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{2}(II) \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(e) Bestimmen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 7 & -9 \\ -1 & 3 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

Man vertauscht die erste Zeile mit dritte und die zweite Zeile mit vierte. Damit erhält man ein Block Matrix mit dem Vorfaktor $(-1)(-1) = 1$. Die Determinante lautet
$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 11$

(f) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit den geordneten Basen $E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ und $B = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{E,B}(\varphi)$ der linearen Abbildung: $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0e_1+0e_2+2e_3, \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0e_1+1e_2-1e_3, \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1e_1+3e_2+0e_3$

$$\Longrightarrow M_{E,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(g) Wie viele Fehlstände hat die Permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(4,5)\} \Longrightarrow 9$ Fehlstände.

(h) Geben Sie einen komplementären Untervektorraum zu $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$.

Lösung:

Wir suchen zwei linear unabhängige Vektoren. Mögliche Antwort: $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 2: (1,5 + 2,5 Punkte) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle , \rangle_w : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \rangle_w = \sum_{i=1}^{2} w_i x_i y_i \text{ mit } w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_E(\langle , \rangle_w)$ von $\langle , \rangle_w$ bezüglich der Standardbasis $E = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.
(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich $\langle , \rangle_w$.

<u>**Lösung:**</u>

(a) $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle_w = 2, \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle_w = 0, \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle_w = 0, \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle_w = 3$ Also ist die Darstellungsmatrix $M_E(\langle , \rangle_w) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Wir verwenden das Gram-Schmidt verfahren über E.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_w \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3: (1+2+1+2 Punkte) Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, indem Sie die charakteristische Polynom zerlegen.
(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenraum von A eine Basis.
(c) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix?
(d) Ist A ähnlich zu einer Matrix in Jordan Normalform? Wenn Ja, geben Sie die Jordan Normalform von A.

<u>**Lösung:**</u>

(a) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & -\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + (-3)\frac{5}{3} - (-3)(2-\lambda) - 2(-\lambda)$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 5 + 6 - 3\lambda + 2\lambda = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^3$$
$$\implies 1 \text{ ist die einzige Eigenwert mit } m_a(1) = 3$$

(b) $E_1 = \text{Kern}(A - I_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (II) \\ (I) \\ -(II) \end{matrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{3}(II) \end{matrix}$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rangle \implies B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } E_1$$

(c) $m_a(1) = 3 \neq 1 = m_g(1) \implies A$ ist nicht diagonalizierbar.

(d) A hat ein Jordan Normalform, weil die charakteristische Polynom zerfällt. Es hat $m_g(1) = 1$ Jordanblock der Länge 3 zum Eigenwert 1.

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (1+2+2+1 Punkte) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], f \longmapsto f(x+2) - 2x^2 \cdot f''(x).$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_B(\varphi)$ von φ bezüglich der Basis $B = \{1, x, x^2\}$.
(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von φ.
(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von φ.
(d) Begründen Sie, ob φ injektiv ist und ob φ surjektiv ist.

Lösung:

(a)
$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 - 2x^2 \cdot 0 = 1 + 0x + 0x^2 \\ \varphi(x) &= x + 2 - 2x^2 \cdot 0 = 2 + 1x + 0x^2 \\ \varphi(x^2) &= x^2 + 4x + 4 - 2x^2 \cdot 2 = 4 + 4x - 3x^2 \end{aligned} \implies M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\text{Kern}(\varphi) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \implies B_{\text{Kern}} = \emptyset$$

(c) Aus der Dimensionssatz folgt: $\dim(\text{Bild}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) - \dim(\text{Kern}(\varphi)) = 3 - 0 = 3 \implies$ $\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Also $B_{Bild} = \{x^2, x, 1\}$

(d) $\text{Kern}(\varphi) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\} \implies \varphi$ ist injektiv.

$\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = \dim(\text{Bild}(\varphi)) \implies \varphi$ ist surjektiv.

Aufgabe 5: (1+2+3 Punkte) Seien U, V, W und X endlich dimensionale K-Vektorräume.
(a) Sei $h : W \to X$ eine Isomorphismus. Zeigen Sie, dass dim(W)=dim(X)
Seien nun $f : U \to V, g : V \to W$ lineare Abbildungen, so dass $g \circ f$ ein Isomorphismus ist. Beweisen Sie die folgende Aussagen.
(b) dim(Bild(f))=dim(U) und dim(Kern(g))=dim(V)-dim(W).
(c) Kern(g)+Bild(f)=V

Lösung:

(a) Da h ein Isomorphismus ist, ist Kern(h)=0 und Bild(h)=W. Damit ist nach demn Dimensionssatz dim(W)=dim(0)+dim(X)=dim(X).

(b) Weil $g \circ f$ injektiv ist, ist auch f injektiv, d.h. $\text{Kern}(f) = 0$.

$\implies \text{dim(U)} = \dim(0) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\text{Bild}(f))$.

Da $g \circ f$ surjektiv ist, ist auch g surjektiv, d.h. $\text{Bild}(g) = W$.

$\implies \dim(\text{Kern}(g)) = \dim(V) - \dim(\text{Bild}(g)) = \dim(V) - \dim(W)$.

(c) Wir zeigen zunächst Kern(g)$\cap$Bild(f)=0. Sei $v \in \text{Kern}(g) \cap \text{Bild}(f)$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit $v = f(u)$, weil $v \in \text{Bild}(f)$. Außerdem gilt $g(f(u)) = g(v) = 0$ da $v \in \text{Kern}(g)$. Da Kern($g \circ f$)=0 folgt $u = 0$ und somit $v = f(u) = 0$. Damit ist Kern(g)$\cap$Bild(f)=0 gezeigt.

dim(Kern(g)+Bild(f))=dim(Kern(g))+dim(Bild(f))-dim(Kern(g)$\cap$Bild(f))
=dim(Kern(g))+dim(Bild(f))=dim(V)-dim(W)+dim(U)=dim(V)-dim(W)+dim(W)=dim(V)

dim(Kern(g)+Bild(f))=dim(V) $\implies$ Kern(g)+Bild(f)=V