Technische Universität München

Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

(2021/2022)

Übungsblatt 4

Yigit Bulutlar

24. März 2022

1 Eigenwerte

1.1

Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist, und geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.
(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und alle Eingewerte von A.
(c) Bestimmen Sie je eine Basis der Eigenräume von A.
(d) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}3 \times 3$ an sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

(a) Wir berechen $A \cdot v == \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v.$
Da v außerdem $\neq 0$ ist, ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2.

(b) Wir berechnen mit der Sarrus-Regel:

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 4-x \end{pmatrix}$
$= (1-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 0 - 1 - (-1)(3-\lambda) - 0 - (-1)(4-\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 21\lambda + 18$

Um Eigenwerte zu bestimmen, faktorisieren wir $\chi_A(\lambda)$. Aus Teil (a) wissen wir, dass 2 ein Eigenwert von A ist, also ist 2 eine Nullstelle des Polynoms $\chi_A(\lambda)$. Mit anderen Worten, ist $\chi_A(\lambda)$ durch $(\lambda - 2)$ teilbar, und Polynomdivision liefert:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6x + 9) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2.$$

Also wir haben die Eigenwerte 2 und 3 mit den algebraischen Vielfachheiten $m_a(2) = 1$ und $m_a(3) = 2$.

(c) Der Eigenraum von A zum Eigenwert λ ist die Lösungsmenge von Kern$(A - \lambda \cdot I_3)$:

$$E_3 = \text{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} (II) \\ (I) \\ \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -2(I) \\ -(I) \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad E_3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_2 = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \cdot(-1) \\ -(I) \\ -(I) \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} +(III) \\ (III) \\ (II) \end{matrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad E_2 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Wir können auch die geometrische Vielfachheiten ablesen: $m_g(2) = 1$ und $m_g(3) = 1$.

(d) Damit A diagonalizierbar ist, muss für jede Eigenwert $m_a = m_g$ gelten. In unserem Beispiel ist $m_a(3) = 2 \neq 1 = m_g(3)$. Also ist A nicht diagonalizierbar.

1.2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

Lösung:

Die Matrix hat n verschidene Eigenwerte, deshalb hat jede Eigenwert $m_a = m_g = 1 \implies A$ ist diagonalisierbar. Das heißt, es gibt eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S mit $D = S^{-1}AS$, wobei auf der Diagonalen von D die Eigenwerte von A stehen. Es gilt nun:

$$\det(A) = \det(SDS^{-1}) = \det(S) \cdot \det(D) \cdot \det(S^{-1}) = \det(S) \cdot \det(D) \cdot \frac{1}{\det(S)} = \det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Letzte Schritt können wir machen, weil wir für die Determinante von D die Diagonaleinträge miteinander multiplizieren.

1.3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ idempotent, d.h. $A^2 = A$. Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von A in $\{0,1\}$ liegen.

Lösung:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{1\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\implies A \cdot Av = A \cdot \lambda v = \lambda A v = \lambda^2 v \implies A^2 v = Av = \lambda^2 v \\ &\implies \lambda v = \lambda^2 v \implies \lambda v - \lambda^2 v = \lambda(1-\lambda)v = 0 \end{aligned}$$

Wegen $v \neq 0$ ist das nur möglich, wenn $\lambda \in \{0,1\}$ gilt.

1.4

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(4)$, so dass $S^T \cdot A \cdot S$ eine diagonal Matrix ist.

(b) Ist durch $(x,y) \longmapsto x^T A y$ ein Skalarprodukt definiert?

Lösung:

(a) Bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms entwickeln wir die Determinante nach Zeile 1:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)^3 - (1-\lambda)) + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)^2 - 1) - ((1-\lambda)^2 - 1) = ((1-\lambda)^2 - 1)((1-\lambda)^2 - 1) = ((1-\lambda)^2 - 1)^2 \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Wir finden die Eigenräume:

$$E_0 = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(I) \\ -(II) \end{matrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_2 = \mathrm{Kern}(A - 2I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ +(II) \end{matrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Aus jedem Eigenraum wählen wir ein Orthonormalsystem bestehend aus zwei Vektoren. Alle vier Vektoren zusammen bilden dann eine ONB des $\mathbb{R}^4$, die wir in die Spalten einer Matrix S schreiben:

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da S orthogonal ist, gilt $S^{-1} = S^T$. Mit der bekannten Formel gilt dann:

$$S^T \cdot A \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Insbesondere definiert A kein Skalarprodukt, da nicht alle Eigenwerte positiv sind.

2 Jordan Normalform

2.1

Gegegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Nehmen Sie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an. Ist A ähnlich zu einer Matrix J_A in Jordan Normalform?
(b) Jetzt nehmen Sie $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ an. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.
(c) Wie lautet die Jordan Normalform von A?

Lösung:

(a) Wir berechnen die charakteristische Polynom von A und schauen, ob es zerfällt.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)+5 = \lambda^2+2\lambda-2\lambda-4+5 = \lambda^2+1$$

Also χ_A zerfällt nicht in der reellen Zahlen $\implies$ A hat kein Jordan Normalform.

(b) In der komplexen Zahlen zerfällt χ_A. Nämlich $\chi_A(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Also A hat die Eigenwerte i und $-i$. Nun berechnen wir die Eigenräume.

$$E_i = \mathrm{Kern}(A - iI_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{array}{c} (II) \\ (I) \end{array} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -2-i \\ 2-i & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ +(2-i)(I) \end{array}$$
$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$
$$E_{-i} = \mathrm{Kern}(A + iI_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ -1 & -2+i \end{pmatrix} \begin{array}{c} (II) \\ (I) \end{array} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -2+i 2+i & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (II) \\ +(2+i)(I) \end{array}$$
$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & i-2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} i-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) A hat zwei Eigenwerte mit jeweils $m_g(i) = m_g(-i) = 1$. Also A hat ein Jordanblock der Länge 1 zu i und ein Jordanblock der Länge 1 zu -i.

$$J_A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

2.2

Gegeben Sei die folgende Matrix. Bestimmen Sie die Jordan Normalform J_A von A und die Transformationsmatrix S so dass $S^{-1}AS = J_A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Erst berechnen wir die Eigenwerte und Eigenräume von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 + (2-\lambda)) + ((2-\lambda) - 1)$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) + 1) + (1-\lambda) = (1-\lambda)((-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 + 1) + 1)$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1) = -(1-\lambda)(1-\lambda)^3 = -(1-\lambda)^4$$

$$E_1 = \text{Kern}(A - 1I_4) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +(I) \\ +(II) \end{array} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_1^2 = \mathrm{Kern}(A - 1I_4)^2 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -(I) \\ +(I) \\ +(I) \end{matrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_1^3 = \mathrm{Kern}(A - 1I_4)^3 = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^4$$

Wir haben also $m_g(1) = 2 \implies$ 2Jordanblöcke, $E_1^3 = \mathbb{R}^4 \implies$ längste Jordanblock hat die Länge 3. Somit hat A die Jordan Normalform:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gehts an die Basis. Da wir ein Block der Länge 3 haben, wählen wir nun einen Vektor, der in E_1^3 liegt, aber nicht in E_1^2. Der Einfachheit halber soll dies $j_1 := (1,0,0,0)^T$ sein. Die ersten Elemente der gesuchten Jordan-Basis lauten so:

$$\{(A-I)^2 \cdot j_1, (A-I) \cdot j_1, j_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Leider haben wir bisher nur 3 Basisvektoren zu einem ansonsten 4-dimensionalen Raum. Also schauen wir zum Schluss in den Kern von $(A - I)$ und suchen uns dort einen Vektor aus, der zu den bisherigen 3 linear unabhängig ist. Zwei haben wir zu Auswahl und wir können beliebig wählen. Wir wählen $(1, 0, 0, -1)^T$ Für die Jordan-Basis ergibt sich also:

$$B_J = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Transformationsmatrix lautet folglich:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3

Berechnen Sie A^{100} für $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix}$

Hinweis: A ist ähnlich zu ihrer Jordan Normalform.

Lösung:

A ist ähnlich zu ihrer Jordan Normalform, also es gilt: $J_A = S^{-1}AS$

$$A^{100} = (SJ_AS^{-1})^{100} = (SJ_AS^{-1})(SJ_AS^{-1})....(SJ_AS^{-1}) = SJ_A^{100}S^{-1}$$

Erst suchen wir die Jordan Normalform von A.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 11-\lambda & -4 \\ 25 & -9-\lambda \end{pmatrix} &= (11-\lambda)(-9-\lambda) + 100 \\ &= \lambda^2 - 11\lambda + 9\lambda - 99 + 100 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

$$E_1 = \text{Kern}(A - I_2) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ -2.5(I) \end{matrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$$

Also wir haben $m_g(1) = 1 \implies$ Es gibt nur ein Jordanblock. Somit ist: $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $J_A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir können jetzt die Jordanbasis finden um die Transformationsmatrizen zu rechnen. Wir suchen Dazu, die Erste Vektor aus dem Kern von $(A - I_2)^2$, die nicht im E_1 enthalten ist.

Kern $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 25 & -10 \end{pmatrix}^2$ =Kern $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$

Wir wählen also einfach $j_1 = (1, 0)^T$. Die Jordan Basis lautet damit:

$B_J = \{(A - I_2) \cdot j_1, j_1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und somit ist $S = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$.

Nun berechen wir S^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{5}{2}(I) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +\frac{2}{5}(II) \\ \cdot(-\frac{2}{5}) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot\frac{1}{10} \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{25} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad S^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 25 & -10 \end{pmatrix}$$ Damit ist:

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 25 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1001 & -400 \\ 2500 & -999 \end{pmatrix}$$