Ferienkurs Mathematik für Physiker 1 (2021/2022)

Kermer, Tom

March 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Das Ziel in der Eigenwerttheorie ist zu einer Vorgegeben (quadratischen) Matrix Vektoren zu finden die wieder auf den eigenen Spann abgebildet werden. Es muss also gelten:

$$Av = \lambda v = \lambda I_n v \to (A - \lambda I_n)v = 0 \leftrightarrow Kern(A - \lambda I_n) \tag{1}$$

Wir sind jetzt zuerst daran interessiert für welche λ die Gleichung über Lösbar ist (Der 0-Vektor ist immer eine Lösung aber für uns nicht relevant). Dazu berechnet man die Determinante von $(A - \lambda I_n)$, damit es einen nicht-trivialen Kern gibt muss diese Determinante Null sein. Diese Determinante als Funktion von λ bezeichnen wir mit $\chi_A(\lambda)$ und nennen sie das Charakteristische Polynom. Die Lösungen von $\chi_A(\lambda) = 0$ sind dann die Eigenwerte.

Nachdem die Eigenwerte λ_i bestimmt wurden setzt man sie nun nacheinander in $(A - \lambda I_n)$ ein und berechnen den Kern dies sind die entsprechenden Eigenvektoren.

1.1 Eigenräume

Jetzt versuchen wir die Ergebnisse zu charakterisieren. Die wichtigsten Ergebnisse sind dabei die algebraischen und die geometrischen Vielfacheiten der Eigenwerte.

Die algebraische Vielfacheit ist einfach die Vielfacheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms.

Die Geometrische Vielfacheit ist die Anzahl der (linear unabhängigen)-Vektoren in Kern$(A - \lambda_i I_n)$.

Die geometrische Vielfacheit ist immer mindestens 1 und kleiner als die algebraische.

Der Vektorraum $E_{\lambda i}$ besteht aus allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i und wird als Eigenraum zum Eigenwert λ_i bezeichnet.

1.2 Diagnoalisierung

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhänig sind, gibt es falls für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfacheit gleich sind, n linear unabhängige Eigenvektoren, die eine Basis bilden. Somit können wir eine Basis aus Eigenvektoren bilden. Damit lässt sich die Matrix A in eine Matrix D transformieren, in der nur noch die Eigenwerte als Elemente auf der Diagonalen auftreten. Sei B die Basis aus Eigenvektoren und E die Standartbasis.

$$D = S^{-1}AS \leftrightarrow A = SDS^{-1} \quad S = T_{EB} \to S^{-1} = T_{BE} \quad D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n) \tag{2}$$

Die Matrix S ist dabei die Basiswechselmatrix von B nach E also besteht sie aus den Eigenvektoren von A geschrieben als die Spalten von S.

Ein Beispiel wird im nächsten Abschnitt gegeben.

1.3 Orthogonale Diagonalisierung

Bei Symmetrischen Matrizen stehen die Eigenräume der verschiedenen Eigenwerte senkrecht aufeinander. [3] Da zu jedem Eigenraum nach dem Gram-Schmit-Verfahren eine Orthonormalbasis angegeben werden kann, kann damit der ganze $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ mit einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren aufgespannt werden.

Versuchen wir nun all das in einem Beispiel durchzurechnen. Man betrachte also die folgende Matrix als Lineare Abbildung: $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to Det(A - \lambda I_n) = (1-\lambda)Det(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}) + 1 * Det(\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

[3]Dies ist ein Spezialfall des Spektralsatzes. Dieser besagt, dass Orthogonale Diagonalisierung genau dann möglich ist wenn gilt $A * \overline{A}^T = \overline{A}^T * A$. Dies ist der vielleicht wichtigste Satz der Linearen Algebra

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = -\lambda^2(2-\lambda) \tag{4}$$

Wir haben also den Eigenwert 2 mit einfacher algebraischer Vielfacheit und den Eigenwert 0 mit 1 facher algebraischer Vielfacheit. Wir berechnen nun die dazugehörigen Eigenräume.

$$A - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Kern(A-2I_n) = spann(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = E_2 \tag{5}$$

$$A - 0I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Kern(A-0I_n) = spann(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = E_0 \tag{6}$$

Jetzt sind wir bereits an einem Punkt, an dem wir eine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren und eine Diagonalmatrix.

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = SDS^{-1} \tag{7}$$

Wir wollen aber noch einen Schritt weiter und die Basis B $= (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ in eine neue Basis umwandeln.

Diese soll wieder aus Eigenvektoren bestehen aber auch ein Orthonormalbasis sein. Da A symmetrisch ist sehen wir direkt, dass E_2 und E_0 snkrecht stehen also müssen wir blos eine Orthonormalbsis der Eigenräume finden. Dies ist leicht getan.

$$E_2 = spann(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad E_0 = spann(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \rightarrow B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{8}$$

Damit können wir ein Orthogonale Transformaionsmatrix S' angeben, bei der wir zum einen direkt die Inverse über die Transposition angeben können und zum anderen sind Orthonormalbases für weiterführende Rechnungen besonders in der Physik extrem hilfreich. (Trägheitstensor, Dielektrizitätstensor, Polarisationstensor...)

$$\rightarrow S' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow S'^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

1.4 Jordan Normalform

Die Jordan Normalform ist die "vorletzte Hoffung" [1] eine Matrix in eine neue Form zu bringen, so dass sie angenehmer ist. Wir brauchen die Jordan Normalform wenn die Matrix nicht diagonalisierbar ist. Sie existiert immer dann, wenn das das Charakteristische Polynom auf dem zugrundeliegenden Körper unter Beachtung der Vielfacheiten n-fach lösbar ist. Anstatt der Eigenwerte auf der Diagonalen müssen wir bei der Jordan Normalform sog. Jordan Blöcke auf der Diagonalen aufstellen. Diese sehen wie folgt aus:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0... \\ ... & ... & ... & .... & \\ 0 & ... & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ein Jordanblock zum Eigenwert λ hat also auf der Diagonalen den Eintrag λ und auf der "Diagonalen" darüber nur Einsen.

Zur bestimmen der Jordanschen Normalform gibt es folgende Formeln:

1. Die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist die Geometrische Vielfacheit von λ.

[1] Es gibt auch noch eine sog. Allgemeine Normalform aber die ist wirklich schrecklich zu berechnen und auch nicht sonderlich hilfreich

2. Die Gesamtlänge der Jordankästchen zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfacheit von λ

Oft reichen diese beiden Kriterien aus. Wenn nicht lässt sich auch mit viel Rechenaufwand die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ der Größe e wie folgt berechnen:

$$rg((A-\lambda I_n)^{e-1}) - 2rg((A-\lambda I_n)^{e}) + rg((A-\lambda I_n)^{e+1}) \tag{11}$$

Wenn man zu dieser Formel greifen muss so ist oft e = 1 leichter zu brechenden, da die Potenzen niedrig bleiben und der erste Term einfach die Dimension der Matrix wird.

Beispiel: Von einer Matrix A $\in$ ^{5} sei folgendes bekannt: Das Charakteristische Polynom lautet $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)^2(i-\lambda)^3$. Außerdem sei $mG(2) = 2$ und $mg(i) = 2$.

Es gilt also für 2 und für i jeweils zwei Jordan Blöcke. Die algebraische Vielfachheit von 3 ist zwei, zwei Blöcke mit Gesamtlänge zwei. Also zwei Blöcke der Größe eins.

Die algebraische Vielfachheit von i ist auch zwei, zwei Blöcke mit Gesamtlänge drei. Also ein block der Größe 1 und ein Block der Größe 2. damit ist die JNF (bis auf Permutation der Blöcke) vollständig bestimmt und wir haben:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{12}$$

1.5 Jordan Basis

Die Jordan normalform soll der Diagonalisierung ähneln, es sollte auch ein Möglichkeit geben eine Matrix S anzugeben so dass gilt: $A = SJS^{-1}$, die Matrix sollte also ähnlich zu ihere JNF sein. Und diese Basiswechselmatrix möchten wir jetzt gern finden. Da verfahren dazu ist ziemlich mühsam und es ist gut möglich, dass in der Klausur nur die JNF benötigt wird und nicht die Transformation. Zur Sicherheit gehen wir das Verfahren aber durch.

Dazu geht man alle Eigenwerte durch arbeitet vom größten Jordanblock zum kleinsten. Man nehme den größten Jordan Block dieser hat die Größe s. Man wähle nun $v_s \in Kern(A-\lambda I_n)^s / Span(Kern(A-\lambda I_n)^{s-1})$.

Hieraus berchnet man $v_{s-1} = (A-\lambda I_n)v_s$; $v_{s-2} = (A-\lambda I_n)v_{s-1}$ und so weiter bis man hieraus s Vektoren erhalten hat. Man schreibt nun diese Vektoren als Spalten an die gleiche Position in die Matrix S in der der Jordan block in J steht. Steht beispielsweise in J der Block zum Eigenwert λ in dem Spalten 3,4 und 5, so steht in Spalte 5 von S v_3, in Spalte 4 v_2 und in Spalte 3 v_1.

Für die weiteren Jordanblöcke und gleichen Eigenwert muss man geht jetzt genauso vorgehen und ein w_r wählen. Bloß muss dieses so gewählt werden dass es zusätzlich nicht im Spann von v_r liegt also: $w_r \in Kern(A-\lambda I_n)^r / Span(Kern(A-\lambda I_n)^{r-1} \cup v_r)$. Ab diesem Punkt arbeitet man den Block genauso durch. Für alle weiteren Blöcke der Länge t zum Eigenwert λ muss der "Startvektor" so gewählt werden, dass er nicht im Spann aller vorhergehenden Vektoren der Ordnung t liegen.

Stellen wir nun all das in einem Beispiel dar.

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -16 & 30 & -44 & -12 \\ 13 & -7 & 18 & -26 & -6 \\ -18 & 12 & -21 & 36 & 12 \\ -9 & 6 & -12 & 26 & 6 \\ 11 & -8 & 15 & -22 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Kern(A-3I_n) = spann(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \tag{13}$$

Zudem gilt $Kern(A-3I_n)^2 = \mathbb{C}^3$.

Fangen wir also mit dem ersten Block der Länge 2 an. Wir wählen $v^2 \in Kern(A - \lambda I_n)^2 / Span(Kern(A - \lambda I_n)^1)$ beispielsweise:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = (A - 3I_n)v_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \\ -18 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Nun nehmen wir uns den zweiter Block der Größe 2 vor.

$$w_2 \in Kern(A - \lambda I_n)^2 / Span(Kern(A - \lambda I_n)^1 \cup v_2) \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow w_1 = (A - 3I_n)w_2 = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ 12 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Der letzte Jordanblock der Länge ein funktioniert genauso, bloß dass hierfür v_2 und w_2 beachtet werden müssen.

$$u_1 \in Kern(A - \lambda I_n)^1 / Span(Kern(A - \lambda I_n)^0 \cup v_1 \cup w_1) = Kern(A - \lambda I_n)^1 / spann(v_1; w_1)) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix zu:

$$S = \begin{pmatrix} 22 & 1 & -16 & 0 & 2 \\ 13 & 0 & -10 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Hier wurden offensichtlich sehr viele Schritte übersprungen, aber wichtig ist vor allem das grobe vorgehen, da man stark davon ausgehen kann, dass in der Klausur falls wirklich eine Volle JNF mit Transformationsmatrixen gesucht wir uns maximal im 3×3 Fall befinden wo das weit einfacher geht.