Technische Universität München
Ferienkurs Mathematik für Physiker 1
(2021/2022)
Übungsblatt 3

Yigit Bulutlar

23. März 2022

1 Skalarprodukt

1.1

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt):

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(b) Ergänzen Sie die in Teil (a) gefundene Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$

Lösung:

(a) Die oben angegebenen Vektoren nennen wir v_1, v_2, v_3. Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an.

$$w_1 = v_1, \qquad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{1} = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \langle u_1, v_3\rangle \cdot u_1 - \langle u_2, v_3\rangle \cdot u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\0\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{5}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Somit haben wir die folgende ONB konsturiert: $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$

(b) Es ist klar, dass wir für die Ergänzung nur ein Vektor brauchen, da dim($\mathbb{R}^4$)-dim(U)=1. Betrachten wir eine allgemeine Vektor $v = (a, b, c, d)^T$. Wegen Orthonormalität gilt, dass $v \perp u_1$, $v \perp u_2$, $v \perp u_3 \implies \langle v, u_i\rangle = 0$. Damit können wir die folgende LGS bilden und mit Hilfe der Gauß-Algorithmus lösen:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ c + 2d &= 0 \\ 5b - 2c + d &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) {\scriptstyle +2(II)} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} \rangle$$

Wir wählen $(0, 1, 2, -1)^T$ als beliebige Matrix von dem Lösungsraum und dividieren es durch seine Länge um v zu rechnen. Somit folgt als ONB von $\mathbb{R}^4$:

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

1.2

Betrachten Sie die Bilinearform

$$\langle , \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \langle v, w\rangle_A := v^T A w, \qquad \text{wobei} A = \begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\0 & 5 & 1\\1 & 1 & 10\end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Bilinearform ein Skalarprodukt ist.
(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis, die die Vektoren $(1,0,0)^T$ und $(0,1,0)^T$ enthält.
Lösung:

(a) Für $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ wir berechnen:

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle_A = (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3)A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= 4v_1^2 + 5v_2^2 + 10v_3^2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3 \\ &= 3v_1^2 + 4v_2^2 + 8v_3^2 + (v_1+v_3)^2 + (v_2+v_3)^2\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist ≥ 0 und er ist $= 0$ genau dann wenn $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, also wenn $v = 0$. Das zeigt, dass $\langle , \rangle_A$ positiv definit ist. Da A symmetrisch ist, ist $\langle , \rangle_A$ auch symmetrisch. Es folgt, dass $\langle , \rangle_A$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Wir werwenden das Gram-Schmidt-Verfahren für $v_1 = (1,0,0)^T$ und $v_2 = (0,1,0)^T$:

$$w_1 = v_1 \qquad u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{sqrt\langle w_1, w_1\rangle_A} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \langle u_1, v_2\rangle_A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{w_2}{sqrt\langle w_2, w_2\rangle_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \implies B = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist ONB}$$

1.3

Finden Sie eine Basis des orthogonalen Komplements (bezüglich der Standardskalarprodukt) des Untervektorraums: $\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}^3$.

Lösung:

Bei dem komplexen Standardskalarprodukt soll man die Komponenten einer der beiden Vektoren komplex konjugieren. Der Definition folgt: $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j$. Das orthogonale Komplement hat die Dimension $\dim(\mathbb{C}^3) - \dim(U) = 2$. Also wir suchen zwei Vektoren, die auf dem gegebenen Vektor orthogonal sind. Sei $v = (a, b, c)^T$ ein beliebiger Vektor aus dem orthogonalen Komploment. Dann folgt:

$$\overline{(1-i)}a + \overline{2}b + \overline{i}c = 0 \implies (1+i)a + 2b - ic = 0 \implies b = \frac{i}{2}c - \frac{1+i}{2}a$$

Damit ist der Lösungsraum $L = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \frac{i}{2}c - \frac{1+i}{2}a \\ c \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

und das orthogonale Komplemet hat die Basis: $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

2 Darstellungsmatrizen

2.1

Gegeben ist die lineare Abbildung: $\psi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \psi(f) = f(x+1) - f(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der Standarbasis$E = \{x^2, x, 1\}$.
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der Basis $B = \{x^2 + x, x + 1, 1\}$ mit Hilfe von Basiswechselmatrizen.

Lösung:

(a) Um die Darstellungsmatrix zu rechnen, setzen wir jede Element der Basis in die Abbildung und schreiben die Lösungen als linear Kombination der Basis Elemente.

$$\begin{aligned} \psi(x^2) &= x^2 + 2x + 1 - x^2 = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ \psi(x) &= x + 1 - x = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ \psi(1) &= 1 - 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \end{aligned}$$

Also die Darstelunngsmatrix ist gegeben durch: $M_E(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Um die Basiswechselmatrix zu rechnen schreiben wir die Elemente von B als Linearkombination der Elemente von E:
$x^2 + x = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1$
$x + 1 = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$
$1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$

Damit lautet die Basiswechselmatrix $S_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun berechen wir die Inverse Matrix:

$$(S_{EB}|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -(I) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -(II)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad S_{EB}^{-1} = S_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit können wir die neue Darstellungsmatrix rechnen als:

$$M_B(\psi) = S_{BE} \cdot M_E(\psi) \cdot S_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_E(\varphi)$ bezüglich der Standardbasis E.
(b) Bestimmen Sie Basen B, C, sodass $M_{B,C}(\varphi) = I_2$.
(c) Gibt es eine Basis B von $\mathbb{R}^2$, sodass $M_B(\varphi) = I_2$.

Lösung:

(a) Sei $C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}$. Dann ist per Definition

$$M_{EC}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{, weil } \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = -2e_1 + 4e_2 \text{ und } \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = 0e_1 + 2e_2$$

Nun suchen wir die Basiswechselmatrix zwischen E und C.

$$S_{EC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad S_{CE} = S_{EC}^{-1} = (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir $M_E(\varphi)$ rechnen als:

$$M_E(\varphi) = M_{EC} \cdot S_{CE} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $B = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ und $C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}$. Da $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $M_{BC}(\varphi) = I_2$.

(c) **Nein.** Angenommen Es gäbe eine Basis B. Dann wäre für alle $v = \mathbb{R}^2$ $\varphi(v)_B = M_B(\varphi) \cdot v_B = I_2 \cdot v_B = v_B$, also würde $\varphi = id$ folgen.

2.3

Wir betrachten das komplexe Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf $\mathbb{C}^3$ gegeben durch

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + x_3 \cdot \overline{y_3} + \frac{i}{2} x_2 \cdot \overline{y_1} + \frac{i}{2} x_3 \cdot \overline{y_2} - \frac{i}{2} x_1 \cdot \overline{y_2} - \frac{i}{2} x_2 \cdot \overline{y_3}$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von $\langle , \rangle$ bezüglich der Standardbasis E an.
(b) Sei $U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3 | x_2 = 0\}$. Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements von U bezüglich $\langle , \rangle$ in $\mathbb{C}^3$.

Lösung:

(a) Um die Darstellungsmatrix zu rechnen bilden wir die Skalarprodukt von jede mögliche Kombination der Basis Elemente.

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1; \qquad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{i}{2}; \qquad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{i}{2}; \qquad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 1; \qquad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -\frac{i}{2}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0; \qquad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{i}{2}; \qquad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1$$

Damit lautet die Darstellungsmatrix $M_E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & 1 & \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(b) Wir können U umformen und als Spann von einer Menge.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3 | x_2 = 0\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Jetzt suchen wir ein Vektor, die orthogonal auf die Elemente der Menge steht. Sei $v = (a, b, c)^T$ eine allgemeine Vektor aus dem orthogonalen Komplement. Damit bilden wir die folgende Gleichungssystem:

$$a + \frac{i}{2} b = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{i}{2} b \qquad\qquad c - \frac{i}{2} b = 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{i}{2} b$$

Damit können wir der Lösungsraum und die Basis des orthogonalen Komplements direkt lesen als:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}b \\ b \\ \frac{i}{2}b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \right\} = \langle \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix} \rangle \qquad \Longrightarrow \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ 1 \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

3 Matrixexponantial

3.1

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\exp(A)$.

Lösung:

A ist bereits in Jordannormalform. Also wir können A als Summe von einer Diagonalmatrix D und einer Nebendiagonalmatrix N schreiben.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

Jetzt können wir die uns bekannte Formel für $\exp(A)$ verwenden.

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{0!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$