Technische Universität München
Ferienkurs Mathematik für Physiker 1
(2021/2022)
Übungsblatt 3

Yigit Bulutlar

23. März 2022

1 Skalarprodukt

1.1

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt):

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(b) Ergänzen Sie die in Teil (a) gefundene Orthonormalbasis zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$

1.2

Betrachten Sie die Bilinearform

$$\langle , \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \langle v, w \rangle_A := v^T A w, \qquad \text{wobei} A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Bilinearform ein Skalarprodukt ist.
(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis, die die Vektoren $(1,0,0)^T$ und $(0,1,0)^T$ enthält.

1.3

Finden Sie eine Basis des orthogonalen Komplements (bezüglich der Standardskalarprodukt) des Untervektorraums: $\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}^3$.

2 Darstellungsmatrizen

2.1

Gegeben ist die lineare Abbildung: $\psi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \,, \psi(f) = f(x+1) - f(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der Standarbasis$E = \{x^2, x, 1\}$.
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ψ bezüglich der Basis $B = \{x^2 + x, x + 1, 1\}$ mit Hilfe von Basiswechselmatrizen.

2.2

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_E(\varphi)$ bezüglich der Standardbasis E.
(b) Bestimmen Sie Basen B, C, sodass $M_{B,C}(\varphi) = I_2$.
(c) Gibt es eine Basis B von $\mathbb{R}^2$, sodass $M_B(\varphi) = I_2$.

2.3

Wir betrachten das komplexe Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf $\mathbb{C}^3$ gegeben durch

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + x_3 \cdot \overline{y_3} + \frac{i}{2} x_2 \cdot \overline{y_1} + \frac{i}{2} x_3 \cdot \overline{y_2} - \frac{i}{2} x_1 \cdot \overline{y_2} - \frac{i}{2} x_2 \cdot \overline{y_3}$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von $\langle , \rangle$ bezüglich der Standardbasis E an.
(b) Sei $U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3 | x_2 = 0\}$. Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements von U bezüglich $\langle , \rangle$ in $\mathbb{C}^3$.

3 Matrixexponantial

3.1

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\exp(A)$.