Ferienkurs Mathematik für Physiker 1 (2021/2022)

Friedrich, Johannes

March 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Skalarprodukt

Symmetrische Bilinearform: Sei V ein R-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

heißt **symmetrische Bilinearform**, falls sie **symmetrisch** für alle $v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

und **bilinear** für alle $u, v, w \in V$ und $a \in \mathbb{R}$

$$\langle u, v + aw \rangle = \langle u, v \rangle + a\langle u, w \rangle$$

ist.

Eine symmetrische Bilinearform heißt **Skalarprodukt**, wenn sie zusätzlich positiv definit

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$

ist. Ein reeller Raum mit Skalarprodukt heißt **Euklidscher Raum**.
Beispiel:

- Das Standartskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^T w = v \cdot w$
- $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ ist für reelle Zahlen $a < b$ ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen reellwertigen Funktionen im Intervall $[a, b]$ (C($[a, b]$,$\mathbb{R}$)).

Zu einer symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ werden durch einsetzen der Standartbasisvektoren Zahlen $a_{i,j} := \langle e_i, e_j \rangle$ erhalten, die zu einer Matrix $A = (a_{i,j})$ zusammengefasst werden können. Diese Matrix A ist symmetrisch und wird die **Darstellungsmatrix** der Bilinearform genannt.

Im **Komplexen** wird das Skalarprodukt als positiv definite hermitesche Sesquilinearform definiert.
Hermitesch heißt, dass für $v, w \in W$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

Sesquilinear heißt, dass. für $u, v, w \in W$ und $a \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\langle u, v + aw \rangle = \langle u, v \rangle + a\langle u, w \rangle$$
$$\langle u + av, w \rangle = \langle u, w \rangle + \overline{a}\langle v, w \rangle$$

Für $v \in V$ heißt

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die (induzierte) **Norm** von v. Für $v, w \in V$ heißt

$$\mathrm{d}(v, w) = ||\text{v-w}||$$

der **Abstand** von v und w.
Ein Vektor v heißt **Einheitsvektor**/**normiert**, falls $||v|| = 1$.
Zwei Vektoren v, w heißen **orthogonal**(senkrecht) zueinander, falls

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Für einen Einheitsvektor $u \in V$ und $v \in V$ heißt

$$\langle u, w \rangle u$$

die **orthogonale Projektion** von v auf u.

Für $u, v \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ bze. $a \in \mathbb{C}$ gilt

- $|\langle v, w \rangle| \leq ||v||||w||$ (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

- $||av|| = |a|||v||$
- $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungleichung)

Orthonormalbasis:

- $S \subseteq V$ heißt Orthogonalbasis, falls alle unterschidlichen Vektoren $v \neq w \in S$ orthogonal sind und S eine Basis von V ist
- Eine Orthogonalbasis $S \subseteq V$ heißt Orthonormalbasis, falls zusätzlich alle Vektoren $v \in S$ normiert sind
- Zu einem Unterraum $U \subseteq V$ heißt

  $$U^{\perp} := \{v \in V | \langle v, u\rangle = 0 \text{ für alle u} \in U\}$$

  das orthogonale Komplement von U und ist selbst auch ein Unterraum von V

Gram-Schmidt Orthogonalisierung:
Mit dem Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren lässt sich leicht aus einer Basis $U = u_1, ..., u_n$ eines Vektorraums eine Orthonormalbasis berechnen. Begonnen wird mit einem Vektor v_1, der zunächst normiert $v_1 = u_1/||u_1||$ wird. Dann werden nach folgendem die restlichen Basen zu einer Orthonormalbasis berechnet:

$$w_i = u_i - \textstyle\sum_{n=1}^{i-1} \langle v_n, u_i\rangle u_i$$
$$v_i = \tfrac{w_i}{||w_i||}$$

Aus diesem Verfahren wird eine Orthonormalbasis $\{v_1, ..., v_n\}$ erhalten.

2 Darstellungsmatrizen

Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ lässt sich (nach Wahl von Basen B von V und C von W) durch eine Matrix beschreiben, da sich $f(v_j)$ als Linearkombination von Elementen in W schreiben lässt.

$$f(v_j) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i \text{ mit } a_{i,j} \in K$$

Die Koeffizienten $a_{i,j}$ lassen sich zu einer Matrix

$$A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$$

zusammenfassen. Diese Matrix A heißt **Darstellungsmatrix** von f bezüglich B und C. Es wird die Schreibweise

$$A = M_{C,B}(f)$$

verwendet. Es wird also von der Basis rechts im Index zur Basis links im Index Abgebildet. Ist $B = C$ wird oft auch nur $M_B(f)$ geschrieben.
Beispiel:
Betrachtet wird eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$ von der Basis $B = \{e_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ auf sich selber. Die zugehörige Darstellungsmatrix ist gegeben durch

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

da $\phi(b_1) = -1b_1 + b_2$ und $\phi(b_2) = b_2$.
Verknüpfung linearer Abbildungen:
Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und A, B, C geordnete Basen von U, V bzw. W. Seien $g : U \to V$ und $f : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann gilt:

$$M_{C,A}(f \circ g) = M_{C,B}(f) \cdot M_{B,A}(g)$$

Liegt eine Darstellungsmatrix $M_{B,C}$, aber es soll eine der Basen gewechselt werden wird eine **Basiswechselmatrix** benötigt. Sei $B = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und $B' = \{v'_1, ..., v'_2\}$ eine weitere Basis von V. Nun können die alten Basisvektoren als Linearkombination in der neuen Basis geschrieben werden

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v_i',$$

mit $a_{i,j} \in K$. Dann heißt

$$S_{B'B} = (a_{i,j})$$

die Basiswechselmatrix von B nach B'.
Die erste Basis steht wieder rechts, die zweite links!
Die Basiswechselmatrix lässt sich auch als Darstellungsmatrix zur Identität auffassen, also $S_{B'B} = M_{B',B}(\mathrm{id}_V)$.
Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume und B, B Basen von V und C,C Basen von W. Dann gilt:

- $S_{BB'} = S_{B'B}^{-1}$
- $M_{C',B'}(f) = S_{C'C} \cdot M_{C,B}(f) \cdot S_{B,B'}$

Die Menge $GL_n(K) := \{A \in K^{n\times n} | A \text{ ist invertierbar } \}$ heißt allgemein lineare Gruppe, oder general linear group auf englisch. Sie bildet mit der Matrixmultiplikation als Operation eine Gruppe.
Der **Basiswechsel der Darstellungsmatrix einer Bilinearform ist anders als der einer linearen Abbildung**. Es gilt:

$$M_C(\langle,\rangle) = S_{BC}^T \cdot M_B(\langle,\rangle) \cdot S_{BC}$$

- Zwei quadratisch Matrizen A, B heißen ähnlich, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt mit $B = SAS^{-1}$
- Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ heißen äquivalent, falls es $S \in GL_n(K)$ und $T \in GL_M(K)$ gibt, so dass $B = TAS^{-1}$

Wird von einer Basis in die Standartbasis gewechselt, so ist die Basiswechselmatrix schnell bestimmt, da die Spalten der Basiswechselmatrix der Darstellung der alten Basis in der Standartbasis entsprechen.
Beispiel:
Sei E die Standartbasis in $\mathbb{R}^2$ und $B' = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ eine Basis, in die gewechselt werden soll. Es wird also $S_{B'E}$ gesucht. $S_{EB'}$ ist somit

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Nun wird noch $S_{B'E}$ berechnet:

$$S_{B'E} = S_{EB'}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

3 Matrixexponential

Ist $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, so konvergiert die Reihe

$$\exp(A) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Für $D = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ gilt

$$\exp(D) = \begin{pmatrix}\exp(a) & 0\\ 0 & \exp(b)\end{pmatrix}, \text{ da } A^k = \begin{pmatrix}a^k & 0\\ 0 & b^k\end{pmatrix}$$

Dies lässt sich auf beliebige Diagonalmatrizen verallgemeinern. Für

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ und } A^k = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ für } k>2$$

also ist

$$\exp(A) = I_3 + A + \tfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnlich mit $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt

$$\exp(B) = S^{-1}\exp(A)S$$

da für die n-te Teilsumme gilt

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (S^{-1}AS)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} S^{-1}A^kS = S^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right)S$$

Ist eine Matrix B in Jordanscher Normalform, dann lässt sie sich als Summe einer Diagonalmatrix D und einer Nebendiagonalmatrix N schreiben $B = N + D$. D und N kommutieren dabei (also $DN = ND$). Kommutieren zwei Matrizen A und B gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

Daraus ergibt sich für eine Matrix $A = S^{-1}BS$ mit Jordanscher Normalform B und maximaler Länge e eines Jordan-Blocks

$$\exp(A) = S^{-1}\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})\ \left(\textstyle\sum_{k=0}^{e-1} \frac{1}{k!} N^k\right)S$$

Damit lassen sich **Differenzialgleichungen** der Form

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$$

mit Lösung

$$\vec{y}(t) = \exp(At)\vec{y_0}$$

leicht lösen.