Technische Universität München

# Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

(2021/2022)

Übungsblatt 2

Yigit Bulutlar

22. März 2022

## 1 Lineare Gleichungssysteme

### 1.1

Geben Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die erweiterte Koeffizientenmatrix an. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für jedes Gleichungssystem. ($a \in \mathbb{R}$)

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ y - 2z &= 4 \\ 2x + 3y - 4z &= 11 \end{aligned} \qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 8 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ 2x - y + 2z &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(c)} \quad \begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ 2x + z &= 0 \\ 4x - 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

**Lösung:**

(a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -(I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2(II) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir wählen $y$ als freie Variable und schreiben die andere Variablen in Abhängigkeit von $y$.

$$x = \tfrac{3}{2} - \tfrac{y}{2}, \quad z = \tfrac{y}{2} - 2$$

Es ergibt sich also die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{y}{2} \\ y \\ \frac{y}{2} - 2 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{y}{2} \\ y \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}(I) \\ -\frac{1}{2}(I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{3}(II) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können von der zweiten Zeile direkt lesen, dass $z = 1$. Wir setzen das in die erste Zeile und schreiben $y$ in Abhängigkeit von $x$. $\Longrightarrow y = 2x - 3$
Es ergibt sich also die Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x-3 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Fall 1: $a \neq \dfrac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2(I) \\ -4(I) \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -2 & 1-2a & 0 \\ 0 & -6 & 2-4a & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -2 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a-1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +\frac{a}{1-2a}(III) \\ +(III) \\ \cdot\frac{1}{2a-1} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{a}{1-2a} \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2a-1} \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{1}{2}(II) \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2-4a} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2a-1} \end{array}\right)$$

Es ergibt sich also die Lösungsmenge: $L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2-4a} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{4a-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1-2a \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Fall 2: $a = \dfrac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2(I) \\ -4(I) \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wenn wir die erhaltene Gleichungen lesen, kriegen wir von der zweiten Zeile $y = 0$ und von der dritten Zeile $y = -\dfrac{1}{6}$. $y$ kann nicht gleichzeitig 2 verschiedene Werte haben, deshalb ist das Gleichungssytem für $a = \dfrac{1}{2}$ nicht lösbar.

## 1.2

Prüfen Sie nach, für welche $a \in \mathbb{C}$ die folgende Vektoren linear unabhängig sind.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ a+i \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -i \\ -a+1-i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

<u>**Lösung:**</u>

Die Vektoren $b_1$, $b_2$, $b_3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das LGS

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ i \\ a+i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -i \\ -a+1-i \\ 1-i \end{pmatrix} = 0$$

eine eindeutige Lösung hat. Wir wenden das Gauß-Verfahren auf die Koeffizientenmatrix $B$, deren Spalten genau diese Vektoren sind, an. Das LGS ist lösbar genau dann wenn $B$ vollen Rang hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1+i & i & -a+1-i \\ 1 & a+i & 1-i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(1+i)(I) \\ -(I) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -a(II) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Offenbar hat diese Matrix Rang 3 genau dann wenn $1 + a^2 \neq 0$. Wir haben also gezeigt: $b_1, b_2, b_3$ sind linear unabhängig genau dann wenn $a \neq \pm i$.

# 2 Matrizen als Lineare Abbildungen

## 2.1

Betrachten Sie die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \longmapsto A \cdot v$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 9 & -27 \\ 2 & 2 & -12 & 22 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $f_A$ eine lineare Abbildung ist.
(b) Bestimmen Sie eine Basis B von Kern($f_A$)
(c) Bestimmen Sie eine Basis C von Bild($f_A$)
(d) Ist $f_A$ surjektiv bzw. injektiv?
<u>**Lösung:**</u>

(a) $1. f_A(v+w) = A \cdot (v+w) = A \cdot v + A \cdot w = f_A(v) + f_A(w)$
$2. f_A(av) = A \cdot (av) = a(A \cdot v) = af_A(v)$

(b) Für Kern($f_A$) ist das durch $A$ gegebene homogene LGS zu lösen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 9 & -27 \\ 2 & 2 & -12 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2(I) \\ +3(I) \\ -2(I) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & -4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3(II) \\ \\ -3(II) \\ +4(II) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 13 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 9x_3 - 13x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \text{Kern}(f_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 9x_3 - 13x_4 \\ -3x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} | x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\Longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Das Bild von $f_A$ wird von den Spalten von A aufgespannt, d.h.

$$\text{Bild}(f_A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -27 \\ 22 \end{pmatrix} \rangle$$

Um eine Basis zu bestimmen, bilden wir eine Matrix in der wir die Elemente von obigem Erzeugendensystem als Spaltenvektoren schreiben d.h. wir transponieren $A$ und bringen diese in Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 \\ 7 & 12 & -27 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3(I) \\ \\ -7(I) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 9 & -12 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3(II) \\ 2(II) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) $\dim(\text{Bild}(f_A)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}^3) \implies f_A$ ist nicht surjektiv.

$\text{Kern}(f_A) \neq 0 \implies f_A$ ist nicht injektiv.

## 2.2

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x], f \longmapsto f' - f(7)$ wobei $f'$ die Ableitung von $f$ ist. Bestimmen Sie eine Basis $B$ von $\text{Kern}(\psi)$ und eine Basis $C$ von $\text{Bild}(\psi)$.

**Lösung:**

Sei $ax^2+bx+c \in \text{Kern}(\psi)$. Dann ist $\psi(ax^2+bx+c) = 2ax+b-49a-7b-c = 0$. Daraus folgt $a = 0$ und $b-7b-c = 0$, d.h. $c = -6b$. Damit hat jedes Polynom im Kern von $\psi$ die Form $bx-6b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$\text{Kern}(\psi) = \langle x-6 \rangle \implies B = \{x-6\}$$

Insbesondere, dim(Kern($\psi$))=1 und mit der Dimensionsformel folgt $\dim(\text{Bild}(\psi)) = \dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[\,x\,]\,) - \dim(\text{Kern}(\psi)) = 3-1 = 2$. Nun raten wir zwei linear unabhängige Elemente im Bild von $\psi$. z.B. sind $\psi(x^2) = 2x-49$ und $\psi(-1) = 1$ linear unabhängig und liegen im Bild von $\psi$. Wegen dim(Bild($\psi$))=2, bilden sie damit schon eine Basis von Bild($\psi$).

$$\implies C = \{2x-49, 1\}$$

## 2.3

Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit Kern($\phi$)=$\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

**Hinweis:** Betrachten Sie $\phi$ als eine Matrix.
**Lösung:**

Wir definieren $\phi(v) = A_\phi \cdot v$ mit $v \in \mathbb{R}^3$ und $A_\phi \in \mathbb{R}^{2\times 3}$
Definition von Kern sagt: $\ker(\phi) = \ker(A_\phi) \to$ LGS in Form $(A_\phi|0)$
Bisher haben wir immer Lösungsräume der LGS gefunden. Jetzt ist uns ein Lösungsraum gegeben und wir suchen eine passende LGS. Gegebene Lösungraum ist:

$$L = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Für eine beliebige $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$ können wir die folgende Lineare Gleichungsystem bilden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 4x_3 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \to \begin{matrix} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{matrix}$$

Wenn wir diese LGS als Koeffizientenmatrix schreiben, können wir die gesuchte Matrix $A_\phi$ finden.

$$\begin{matrix} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{matrix} \to \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

Also die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \phi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot v$ hat den Kern $\ker(\phi) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

**Achtung!** Die oben gegebene $\phi$ ist nicht die einzige mögliche lineare Abbildung. Jede Matrix, deren Zeilen aus eine Linearkombination von den Zeilen von $A_\phi$ entsteht hat die selbe Eigenschaft.

### 2.4

Seien $K$ ein Körper, $V, W$ zwei endlich dimensionale $K$-VR. Weiter sei $Z$ ein Untervektorraum von $W$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Z)$ ein Untervektorraum von $V$ ist.

**Lösung:**

Da $Z$ ein Untervektorraum ist, so gilt $0 \in Z$. Da $f$ linear ist, so gilt $f(0) = 0 \in Z$, also $0 \in f^{-1}(Z)$.
Seien nu $x, y \in f^{-1}(Z)$ und $\lambda \in K$. Da $f$ linear ist , so gilt $f(x + y) = f(x) + f(y) \in Z$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in Z$. Somit also $x + y, \lambda x \in f^{-1}(Z)$. Damit sind alle Bedingungen für Unterräume erfüllt.

## 3 Determinante

### 3.1

Betrachten Sie die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4\times4}$ und die Permutationen $\sigma, \tau \in S_4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(a) Berechnen Sie $C = A \cdot B$
(b) Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstände $w(\sigma)$ bzw. $w(\tau)$.
(c) Berechnen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$ bzw. $\operatorname{sgn}(\tau)$
(d) Berechnen Sie die Determinante von $C$ nach der Leibniz-Formel.

**Lösung:**

(a)
$$C = ( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\sigma$ : Fehlstände $= \{(1,4), (2,4), (3,4)\} \implies w(\sigma) = 3$
$\tau$ : Fehlstände $= \{(1,2), (1,4), (3,4)\} \implies w(\tau) = 3$

(c) $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{w(\sigma)} = -1, \quad \operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{w(\tau)} = -1$

(d) $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B) = (\sum_{\pi \in S_4} (\operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)})) \cdot (\sum_{\pi \in S_4} (\operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\pi(i)}))$

$= (\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (\operatorname{sgn}(\tau) \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3) = (-24) \cdot (-24) = 576$

## 3.2

Bestimmen Sie die Determinante folgenden Matrizen. Versuchen Sie bei jede Teilaufgabe möglichst verschiedene Berechnungsverfahren zu verwenden.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

(b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

(c)
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

(d)
$$D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & -15 \\ -2 & -10 & 3 & -21 \\ -1 & -4 & 1 & -9 \\ -13 & 2 & -2 & 21 \end{pmatrix}$$

**<u>Lösung:</u>**

(a) $A$ ist eine $3 \times 3$ Matrix mit relativ kleine Koeffizienten, deshalb macht es Sinn als Berechnungsverfahren die Sarrusregel zu verwenden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

Damit können wir die Determinante Rechnen als:
$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1 + 6 - 2 - 4 + 1 - 3 = -1$

(b) $B$ ist eine $4 \times 4$ Matrix mit drei Koeffizienten gleich 0 jeweils in die dritte Zeile und die dritte Spalte. Deshalb macht es hier am meisten Sinn die Laplace-Entwicklung zu verwenden.

$$\det(B) = \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}) = (-1)^{(3+4)} \cdot (-3) \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= 3 \cdot (-1)^{(2+3)} \cdot 4 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}) = 3 \cdot (-1) \cdot 4 \cdot (-2 + 1) = 12$$

(c) Wenn wir die erste und die dritte Zeile von $C$ vertauschen erhalten wir eine Blockmatrix. Dann können wir die Formel für Blockmatrizen verwenden um die Determinante von $C$ rechnen.

$$\det(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)) = \det(A) \cdot \det(C)$$

Damit folgt:

$$\det(C) = \det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}) \begin{matrix} (III) \\ \\ (I) \\ \\ \end{matrix} = (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 14 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix})$$

$$= (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}) = (-1) \cdot (2 - 1) \cdot (7 - 10) = 3$$

(d) Es gibt keine einfache Methode für die Determinante von $D$. Deshalb verwenden wir ganz allgemein die Gauß-Algorithmus:

$$\det(D) = \det(\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & -15 \\ -2 & -10 & 3 & -21 \\ -1 & -4 & 1 & -9 \\ -13 & 2 & -2 & 21 \end{pmatrix}) \begin{matrix} (III) \\ \\ (I) \\ \\ \end{matrix} = (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -9 \\ -2 & -10 & 3 & -21 \\ 4 & -4 & 2 & -15 \\ -13 & 2 & -2 & 21 \end{pmatrix}) \begin{matrix} \\ -2(I) \\ +4(I) \\ -13(I) \end{matrix}$$

$$= (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -20 & 6 & -51 \\ 0 & 54 & -15 & 138 \end{pmatrix}) \begin{matrix} \\ \\ -10(II) \\ +27(II) \end{matrix} = (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 12 & 57 \end{pmatrix}) \begin{matrix} \\ \\ \\ +3(III) \end{matrix}$$

$$= (-1) \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-6) = -48$$

## 3.3

Beweisen Sie die folgende Aussage für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A \text{ ist nicht invertierbar } \implies AB \text{ ist nicht invertierbar für } \forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

**Lösung:**

Wir wissen, dass $A$ ist nicht invertierbar $\iff \det(A) = 0$. Also $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0 \cdot \det(B) = 0 \implies AB$ ist nicht invertierbar.