Technische Universität München

Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

(2021/2022)

Übungsblatt 2

Yigit Bulutlar

22. März 2022

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1

Geben Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die erweiterte Koeffizientenmatrix an. Bestimmen Sie die Lösungsmenge für jedes Gleichungssystem. ($a \in \mathbb{R}$)

(a)
$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ y - 2z &= 4 \\ 2x + 3y - 4z &= 11 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 8 \\ 2x - y + 4z &= 7 \\ 2x - y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ 2x + z &= 0 \\ 4x - 2y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

1.2

Prüfen Sie nach, für welche $a \in \mathbb{C}$ die folgende Vektoren linear unabhängig sind.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ a+i \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -i \\ -a+1-i \\ 1-i \end{pmatrix}$$

2 Matrizen als Lineare Abbildungen

2.1

Betrachten Sie die Abbildung $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, v \longmapsto A \cdot v$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 9 & -27 \\ 2 & 2 & -12 & 22 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_A eine lineare Abbildung ist.
(b) Bestimmen Sie eine Basis B von Kern(f_A)
(c) Bestimmen Sie eine Basis C von Bild(f_A)
(d) Ist f_A surjektiv bzw. injektiv?

2.2

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], f \longmapsto f' - f(7)$ wobei f' die Ableitung von f ist. Bestimmen Sie eine Basis B von Kern(ψ) und eine Basis C von Bild(ψ).

2.3

Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit Kern(ϕ)=$\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Hinweis: Betrachten Sie ϕ als eine Matrix.

2.4

Seien K ein Körper, V, W zwei endlich dimensionale K-VR. Weiter sei Z ein Untervektorraum von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Z)$ ein Untervektorraum von V ist.

3 Determinante

3.1

Betrachten Sie die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und die Permutationen $\sigma, \tau \in S_4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(a) Berechnen Sie $C = A \cdot B$
(b) Berechnen Sie die Anzahl der Fehlstände $w(\sigma)$ bzw. $w(\tau)$.
(c) Berechnen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$ bzw. $\operatorname{sgn}(\tau)$
(d) Berechnen Sie die Determinante von C nach der Leibniz-Formel.

3.2

Bestimmen Sie die Determinante folgenden Matrizen. Versuchen Sie bei jede Teilaufgabe möglichst verschiedene Berechnungsverfahren zu verwenden.

(a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

(b)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

(c)
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

(d)
$$D = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & -15 \\ -2 & -10 & 3 & -21 \\ -1 & -4 & 1 & -9 \\ -13 & 2 & -2 & 21 \end{pmatrix}$$

3.3

Beweisen Sie die folgende Aussage für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A \text{ ist nicht invertierbar } \Longrightarrow AB \text{ ist nicht invertierbar für } \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$