Technische Universität München

Ferienkurs Mathematik für Physiker 1

(2021/2022)

Übungsblatt 1

Yigit Bulutlar

21. März 2022

1 Matrizen und Vektoren

1.1

Gegeben seien die folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgende Matrixprodukte sind definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

(a)AC (b)AB (c)CD (d)BC (e)BD (f)DA

Lösung:

(a) AC ist nicht definiert: $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die 'mittlere Dimension' stimmt also nicht überein.

(b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $CD = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ -4 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $BC = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 3 \\ 24 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $BD = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 1 & 9 \\ -3 & 4 & -1 & 6 \\ 17 & 9 & 12 & -15 \end{pmatrix}$ (f) $DA = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

1.2

Es seien die folgende beiden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}.
(b) Rechnen Sie nach, dass $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.
(c) Sind AB bzw. BA invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige inverse Matrix.
(d) Zeigen Sie: Ist $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, invertierbare Matrix, so ist auch C^{-1} symmetrisch.

Lösung:

(a)

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4(I) \\ +2(I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2(II) \\ \\ +(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2(I) \\ -(I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{2}(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{8} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}(III) + (II) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \implies B^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$(A^T) \cdot (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = (A^T) \cdot (A^T)^{-1}$$

$\implies (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(c) Sowohl A als auch B sind invertierbar, also gilt das auch für ihre Produkte. Weil wir wissen, dass $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ gilt, können wir einfach zwei Matrixprodukte berechnen, statt die inverse Matrix auszurechnen:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & -2 & 2 \\ -22 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 22 & -2 & 18 \\ -10 & 1 & -8 \\ -6 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

(d) Sei C eine symmetrische und invertierbare Matrix und $C' = C^{-1}$. Definition der Symmetrie zeigt, dass $C = C^T$ gilt. Mit der Teilaufgabe (b) folgt dann:

$$(C')^T = (C^{-1})^T = (C^T)^{-1} = C^{-1} = C'$$

$(C')^T = C'$ zeigt, dass auch $C' = C^{-1}$ symmetrisch ist.

2 Gruppen

2.1

Mit Hilfe der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ definieren wir eine Verknüpfung:

$$\diamond : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \diamond y := x \cdot y - x - y + 2$$

(a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $x \neq 1$, $y \neq 1$ auch $x \diamond y \neq 1$ ist.
(b) Es sei $G := \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nach Teilaufgabe (a) haben wir also eine Abbildung $\diamond : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \diamond y$. Zeigen Sie, dass G zusammen mit $\diamond$ eine kommutative Gruppe ist.
Lösung:

(a) Angenommen, $x, y \in \mathbb{R}$ so dass $x \diamond y = xy - x - y + 2 = 1$. Dann folgt $(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 = 0$. Es muss also entweder $x = 1$ oder $y = 1$ gelten. Damit ist die erste Aussage gezeigt.

(b) Wir zeigen, dass $(G, \diamond)$ eine Gruppe bildet, indem wir die Gruppenaxiome überprüfen:
1. Es gilt $x \diamond y = xy - x - y + 2 = y \diamond x$ für alle $x, y \in G$. Damit ist $(G, \diamond)$ kommutativ.
2. Es gilt $x \diamond y = (x-1)(y-1) + 1$. Wir haben also für beliebige $x, y, z \in G$:

$$\begin{aligned}(x \diamond y) \diamond z &= ((x-1)(y-1) + 1) \diamond z \\ &= ((x-1)(y-1))(z-1) + 1 \\ &= (x-1)((y-1)(z-1)) + 1 \\ &= x \diamond ((y-1)(z-1) + 1) = x \diamond (y \diamond z)\end{aligned}$$

also ist $(G, \diamond)$ assoziativ.
3. Für alle $x \in G$ gilt $x \diamond 2 = 2 \diamond x = x$, also ist 2 das neutrale Element von $(G, \diamond)$.
4. Wir haben $x \diamond \frac{x}{x-1} = \dfrac{x^2}{x-1} - x - \dfrac{x}{x-1} + 2 = \dfrac{x^2 - x(x-1) - x}{x-1} + 2 = 2$ und wegen Kommutativität folgt auch $\dfrac{x}{x-1} \diamond x = 2$. Also ist $\dfrac{x}{x-1}$ das inverse Element zu $x \in G$ bezüglich $\diamond$.

2.2

In der symmetrischen Gruppe S_6 seien die folgenden Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die folgenden Permutationen sowohl in Tabellenschreibweise als auch als Produkte von paarweise elementfremden Zykeln an:

$$\text{(a) } \sigma\tau, \quad \text{(b) } \mu\tau, \quad \text{(c) } \mu^{-1}, \quad \text{(d) } \sigma\tau\sigma^{-1}$$

Lösung:

(a) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,5,3,6)(2,4)$

(b) $\mu\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1,3,6,4,5)$

(c) $\mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (2,4,3)(5,6)$

(d) $\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,6,3,5,4,2)$

3 Vektoräume

3.1

Welche der Folgende Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\text{(a) } U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x - z = 5 \right\} \qquad \text{(b) } U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y = 0 \right\}$$

$$\text{(c) } U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y^2 + z^2 = 0 \right\} \qquad \text{(d) } U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x \geq 0 \text{ und } y \leq 0 \right\}$$

Lösung:

(a) **Nein.** Wir haben $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$, also kann U_1 kein Unterraum sein.

(b) **Ja.** Wir prüfen die Unterraumaxiome für beliebige $v, w \in U_2$ und $a \in \mathbb{R}$.:
1. $(0,0,0)^T \in U_2 \implies U_2 \neq \varnothing$
2. $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = (x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2) = 0 + 0 = 0$. Also liegt $v + w$ in U_2.
3. $ax + 2ay = a \cdot (x + 2y) = a \cdot 0 = 0$ Also liegt $a \cdot v$ in U_2

(c) **Ja.** Falls $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U_3$, so gilt $y^2 + z^2 = 0$. Es folgt $y = z = 0$, da $y^2, z^2 \geq 0$. Es folgt, dass U_3 folgende Form hat:

$$U_3 = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \}$$

Das heißt U_3 entspricht die x-Achse in $\mathbb{R}^3$ und ist deswegen ein Unterraum.

(d) **Nein.** Wir haben $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_4$, aber $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_4$.

3.2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ ist Funktion}\}$. Zeigen Sie, dass die folgende Mengen Untervektorräume sind.

(a) $U_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}\}$
(b) $U_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = -f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}\}$

Lösung:

Im folgenden sei $f_0(x) = 0$ die Nullfunktion.

(a) Wir überprüfen die Krieterien Für UVR.
1. $f_0(x) = f_0(-x) \implies f_0 \in U_1 \implies U_1 \neq \varnothing$
2. $(f + f')(x) = f(x) + f'(x) = f(-x) + f'(-x) = (f + f')(-x) \implies (f + f') \in U_1$
3. $(af)(x) = af(x) = af(-x) = (af)(x) \implies (af)(x) \in U_1$

(b) Wir überprüfen die Krieterien Für UVR.
1. $f_0(x) = -f_0(-x) \implies f_0 \in U_2 \implies U_2 \neq \varnothing$
2. $(f + f')(x) = f(x) + f'(x) = -f(-x) - f'(-x) = -(f + f')(-x) \implies (f + f') \in U_2$
3. $(af)(x) = af(x) = -af(-x) = -(af)(x) \implies (af)(x) \in U_2$

3.3

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$V = U \cup W \iff V = U \text{ oder } V = W$$

Lösung:

"$\Longleftarrow$"
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V = U$. Dann ist $U \cup W = V \cup W = V$.
" $\Longrightarrow$ "
Fall 1: $U = W$. $(U = W \implies V = U \cup W = U \cup U = U) \implies V = U$
Fall 2: $U \neq W$ und $W \not\subset U$. Angenommen, es wäre $U \neq V$ und $W \neq V$. Dann gäbe es $u \in U \backslash W$ und $w \in W \backslash U$ $(\star)$. Es folgt $u + w \in V = U \cup W$, weil u und w in V liegen. Also $u + w \in U$ oder $u + w \in W$. Dies impliziert $w = (u + w) - u \in U$ oder $u = (u + w) - w \in W$ im Widerspruch zu $(\star)$. (Letzte Teil können wir sagen, weil $u + w$ und u beide in U liegen bzw. gleiche für $u \in W$)
Fall 3: $U \neq W$ und $W \subset U$. Sei $W \subset U$ oder $U \subset W$, dann können wir immernoch die Hälfte von Fall 2 verwenden um die Asusage zu beweisen.

4 Basen

4.1

Bestimmen Sie, ob folgende Teilmengen linear unabhängig sind. Erzeugen diese Teilmengen den jeweils umgebenden Vektorraum?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $\{x + 2x^2 + 7x^3,\ 2x + 3x^2 + 5x^3,\ 2x + 8x^3\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

Lösung:

(a) Wir schreiben die Vektoren als Zeilen einer Matrix und bestimmen der Rang dieser Matrix.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (III) \\ \\ (I) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -5(I) \\ +3(I) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}(II) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat also keine volle Rang $\implies$ Die Vektoren sind linear abhängig. Die Menge erzeugt $\mathbb{R}^3$ nicht, weil dafür man mindestens drei linear unabhängige Vektoren braucht.

(b) Wir suchen die Lösungen der Gleichung $a_1(x+2x^2+7x^3)+a_2(2x+3x^2+5x^3)+a_3(2x+8x^3) = 0$. Dazu vergleichen wir jede Koeffizient in sich selbst und bilden damit die Gleichungssystem: $a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0$ (für x), $2a_1 + 3a_2 = 0$ (für x^2), $7a_1 + 5a_2 + 8a_3 = 0$ (für x^3). Nun lösen wir diese Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2(I) \\ -7(I) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -9 & -6 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -9(II) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ die einzige Lösung und die Vektoren linear unabhängig. Die Menge erzeugt aber den Raum nicht, weil $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ 4-dimensional ist, aber wir nur drei Vektoren haben. Unsere Menge hat keine Koeffizient, die x^0 erzeugt.

(c)Wir suchen die Lösung der Gleichung:

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + a_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Wie in Teilaufgabe (b) betrachten wir jede Koeffizient in sich selbst und bilden damit eine Gleichungsystem:

$$\begin{array}{r} a_1 + a_4 = 0 \\ -a_1 + a_2 + a_4 = 0 \\ -a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ -a_3 + a_4 = 0 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +(I) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +(II) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +(III) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ die einzige Lösung $\implies$ Die Vektoren sind linear unabhängig. Die Vektoren erzeugen auch den Raum, weil je 4 linear unabhängige Vektoren den 4-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ erzuegen.

4.2

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2-i \\ 1-i \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}^3$$

und ergänzen Sie es zu einer Basis von $\mathbb{C}^3$.

Lösung:

Schreibe Vektoren in Zeilen und bringe Matrix in Zeilen-Stufen-Form.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & i & i+1 \\ -i & 2-i & 1-i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -i\cdot(I) \\ i\cdot(I) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ eine Basis von U.

Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$ ist $U' := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \supsetneq U \implies \dim U' > \dim U = 2$, also $\dim U' = 3 = \dim \mathbb{C}^3$ und somit ist U' eine durch Ergänzung erhaltene Basis von $\mathbb{C}^3$.