Technische Universität München
Ferienkurs Mathematik für Physiker 1
(2021/2022)
Übungsblatt 1

Yigit Bulutlar

21. März 2022

1 Matrizen und Vektoren

1.1

Gegeben seien die folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgende Matrixprodukte sind definiert? Berechnen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

(a)AC (b)AB (c)CD (d)BC (e)BD (f)DA

1.2

Es seien die folgende beiden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}.
(b) Rechnen Sie nach, dass $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.
(c) Sind AB bzw. BA invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die jeweilige inverse Matrix.
(d) Zeigen Sie: Ist $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, invertierbare Matrix, so ist auch C^{-1} symmetrisch.

2 Gruppen

2.1

Mit Hilfe der üblichen Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ definieren wir eine Verknüpfung:

$$\diamond : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x \diamond y := x \cdot y - x - y + 2$$

(a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $x \neq 1$, $y \neq 1$ auch $x \diamond y \neq 1$ ist.
(b) Es sei $G := \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nach Teilaufgabe (a) haben wir also eine Abbildung $\diamond : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \diamond y$. Zeigen Sie, dass G zusammen mit $\diamond$ eine kommutative Gruppe ist.

2.2

In der symmetrischen Gruppe S_6 seien die folgenden Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mu := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die folgenden Permutationen sowohl in Tabellenschreibweise als auch als Produkte von paarweise elementfremden Zykeln an:

$$\text{(a) } \sigma\tau, \quad \text{(b) } \mu\tau, \quad \text{(c) } \mu^{-1}, \quad \text{(d) } \sigma\tau\sigma^{-1}$$

3 Vektoräume

3.1

Welche der Folgende Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\text{(a) } U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x - z = 5 \right\} \qquad \text{(b) } U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y = 0 \right\}$$

$$\text{(c) } U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y^2 + z^2 = 0 \right\} \qquad \text{(d) } U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x \geq 0 \text{ und } y \leq 0 \right\}$$

3.2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ ist Funktion}\}$. Zeigen Sie, dass die folgende Mengen Untervektorräume sind.

$$\text{(a) } U_1 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{(b) } U_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x) = -f(-x) \, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

3.3

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$V = U \cup W \iff V = U \text{ oder } V = W$$

4 Basen

4.1

Bestimmen Sie, ob folgende Teilmengen linear unabhängig sind. Erzeugen diese Teilmengen den jeweils umgebenden Vektorraum?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(b) $\{x + 2x^2 + 7x^3,\ 2x + 3x^2 + 5x^3,\ 2x + 8x^3\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[\,x]$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

4.2

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2-i \\ 1-i \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{C}^3$$

und ergänzen Sie es zu einer Basis von $\mathbb{C}^3$.