Ferienkurs Mathematik für Physiker 1 (2021/2022)

Friedrich, Johannes

March 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen und Vektoren

In diesem Kapitel steht K stets für einen Körper, also z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
Eine m×n **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Elementen aus K auf m Zeilen und n Spalten der Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt

- **Zeilenvektor**, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$
- **Spaltenvektor**, falls $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$
- **Skalar**, falls $A = (a) = a \in K^{1 \times 1}$
- **quadratisch**, falls n = m
- **Nullmatrix**, falls A = $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} := \mathbf{0}$
- **Einheitsmatrix**, falls $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} := I_n$

Beim **transponieren** einer Matrix werden die Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht.
Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix heißt **symmetrisch**, falls $A^T = A$ gilt.

Addition zweier Matrizen:
Es können nur zwei Matrizen mit der selben Anzahl an Zeilen m und Spalten n miteinander addiert werden. Die Addition erfolgt dabei komponentenweise, also

$$A + B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit} \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2+7 \\ 3+1 & 6-3 \\ 5+1 & -10+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 4 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ist jedoch nicht definiert.

Skalare Multiplikation:
Sei $\lambda \in K$ und $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$. Dann gilt

$$\lambda \cdot (a_{i,j}) = (\lambda \cdot a_{i,j})$$

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation:
Seien $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{i,j}) \in K^{n \times l}$ zwei Matrizen, bei denen die Spaltenanzahl der ersten gleich der Zeilenanzahl der zweiten Matrix ist. Dann ist

$$A \cdot B = (c_{i,j}) \qquad \text{mit} \qquad c_{i,j} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Merkregel: „Zeile mal Spalte"
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 - 10 \cdot 4 & 5 \cdot 1 - 10 \cdot 2 & 5 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 33 & 15 & 12 \\ -25 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist jedoch nicht definiert.

Rechenregeln für Matrizen:
Seien A, B, C Matrizen, dann gilt:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot b + A \cdot C$
- $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$
- Im Allgemeinen gilt NICHT $A \cdot B = B \cdot A$. Dies gilt nur, wenn die Matrizen kommutieren

Invertierung von Matrizen:
Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es $B \in K^{n \times n}$ gibt mit $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Die Matrix B ist dann eindeutig bestimmt, und B wird als Inverse von $B = A^{-1}$ geschrieben. Um eine Matrix A zu invertieren wird A neben die Einheitsmatrix gleicher Größe geschrieben. Dann werden auf beiden Seiten die gleichen Umformungen in jedem Schritt gemacht, bis auf der Seite von A die Einheitsmatrix steht. Die Matrix auf der Seite wo die Einheitsmatrix stand ist dann die Inverse von A.

2 Gruppen

Eine **Gruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b = ab$, sodass die folgenden Gruppenaxiome erfüllt sind:

- $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativität)
- $\exists e \in G : \forall a \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$ (Neutrales Element)
- $\forall a \in G : \exists a' \in G : a' \cdot a = e$ (Inverses Element)

Gilt außerdem $\forall a, g \in G : a \cdot b = b \cdot a$ heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.
Beispiele:

- $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da es kein neutrales Element gibt.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da nur 1 und -1 ein inverses besitzen.
- $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(-1, 1, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

Außerdem gelten in einer Gruppe die folgenden Rechenregeln

- $\forall a \in G : (a^{-1})^{-1} = a$
- $\forall a, b \in G : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Eine **Untergruppe** U einer Gruppe $(G, *)$ ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, die alle Gruppenaxiome erfüllt

3 Vektorräume

Ein K**-Vektorraum** (auch Vektorraum über K genannt) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V, (a, \vec{v}) \mapsto a \cdot \vec{v}$$

so dass die folgenden Axiome gelten:

- V ist mit $+$ als Verknüpfung eine kommutative Gruppe
- $\forall a \in K \text{und} \vec{v}, \vec{w} \in V \text{gilt} a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$
- $\forall a, b \in K \text{und} \vec{v} \in V \text{gilt} (a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
- $\forall a, b \in K \text{und} \vec{v} \in V \text{gilt} (a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$
- $\forall \vec{v} \in V \text{gilt} 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Ein Standardbeispiel für einen Vektorraum ist der $\mathbb{R}^n$, der n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum. Auch der Raum der Polynome $K[x]$ ist ein Vektorraum.
Ein **Untervektorraum** U ist Teilraum $U \subseteq V$, für den gilt:

- $U \neq \varnothing$
- Für $v, w \in U$ ist auch $v + w \in U$
- Für $a \in K$ und $v \in U$ ist auch $a \cdot v \in U$

Also enthält jeder Unterraum den Nullvektor und jeder Unterraum ist selbst wieder ein K-Vektorraum. Sowohl der Schnitt zweier Unterräume $U_1 \cap U_2 \subseteq V$, als auch $U_1 + U_2 := v + w | v \in U_1, w \in U_2$ sind Unterräume.

4 Basen

Linearkombinationen Linearkombination:
Es seien $v_1, ..., v_n \in V$ Vektoren. Ein Vektor $v \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, ..., v_n$, falls es Skalare $a_1, ..., a_n \in K$ gibt, so dass

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

Beipiel:
Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $v = 2v_1 + 1v_2$.
Die Koeffizienten können dabei durch lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.
Erzeugter Unterraum:
Für eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist der erzeugte Unterraum $\langle S \rangle$ die Menge aller Linearkombinationen von S:

$$\langle S \rangle = \{ v \in V | v \text{ ist Linearkombination von } S \}$$

Insbesondere gilt

$$\langle v_1, ...v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i | a_1, ..., a_n \in K \right\}$$

Beispiel:

- $S = \{1, x, x^2, ...\}$ erzeugt den Vektorraum der Polynome
- n linear unabhängige Vektoren spannen immer einen n-dimensionalen Raum auf

Lineare Unabhängigkeit:
Vektoren $v_1, ...v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls für alle $a_1, ..., a_n$ die folgende Implikation gilt:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1, ..., a_n = 0$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass es für $v \in \langle v_1, ...v_n\rangle$ eindeutig bestimmte $a_1, ..., a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ gibt. Ist dies nicht der Fall heißen die Vektoren linear abhängig.

Es sei $S \subseteq V$ eine Teilmenge.

- S heißt **Erzeugendensystem** von V, falls $\langle S\rangle = V$
- S heißt **Basis** von V, falls S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist

Fast alle Vektorräume können beliebig viele Basen besitzen
Beispiele:

- Die kanonische Standartbasis des $\mathbb{R}^3$ ist $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- Eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ ist $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
- Keine Basis des $\mathbb{R}^3$ hingegen ist $w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, da $w_1$undw_2 linear abhängig sind.

  Folgende Aussagen sind für eine Teilmenge $S \subseteq V$ äquivalent:

- S ist eine Basis von V
- S ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V
- S ist minimales Erzeugendensystem von V

Ist ein Vektorraum V endlich erzeugt, dann ist seine Dimension $\dim(V)$ gleich der Anzahl der Elemente in seiner Basis. Ansonsten gilt $\dim(V)=\infty$ Daraus lassen sich mit $S = v_1, ..., v_n \subseteq V$ nützliche Kriterien für eine Basis herleiten:

- Ist n<dim(V), dann ist $V \neq \langle S\rangle$
- Ist n>dim(V), dann ist S linear abhängig