Technische Universität München
Fakultät für Physik
Felix Schwarzfischer, Felix Forner

Sommersemester 2021
Ferienkurs Theoretische Physik 1 (Mechanik)

Probeklausur - Lösung

Bearbeitungszeit: 90 min
Gesamtpunktzahl: 100

1 Kurze Fragen

[25 Punkte]

Bearbeiten Sie **fünf** der folgenden Teilaufgaben.

(a) (i) Beschreiben Sie kurz in Worten, was man unter dem Hamilton'schen Prinzip versteht.
(ii) Wir betrachten ein System aus drei Teilchen im dreidimensionalen Raum, welches 2 Zwangsbedingungen unterliegt. Wie viele Dimensionen hat der dazugehörige Phasenraum? **[5 Punkte]**

(b) Leiten Sie her, dass das Kurvenintegral über eine konservative Kraft

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{1}$$

nicht von der Wahl des Verbindungswegs abhängt. Parametrisieren Sie dazu den Weg als $\vec{r}(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.
[5 Punkte]

(c) Zeigen Sie unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols, dass

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2}. \tag{2}$$

Hinweis: Sie dürfen die Graßmann-Identität

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{3}$$

verwenden. **[5 Punkte]**

(d) Sei eine physikalische Größe $f = f(q, p)$ gegeben, wobei q, p kanonische Koordinaten im Hamilton-Formalismus sind. Weiterhin gelten die Hamilton-Gleichungen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\}$$

wobei

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}.$$

[5 Punkte]

(e) Im Phasenraum der kanonischen Koordinaten im Hamilton Formalismus, betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} = (\dot{q}, \dot{p})$$

Es sollen nun die Hamilton-Gleichungen gelten. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

[5 Punkte]

(f) Beweisen Sie, dass das Betragsquadrat $\vec{L}^2$ des Drehimpulses $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ invariant unter Koordinatentransformationen $x_i \to x_i' = R_{ij}x_j$ ist, wobei R_{ij} eine orthogonale Matrix ist. (Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (c)). **[5 Punkte]**

(g) Beweisen Sie, dass der Trägheitstensor Diagonalgestalt annimmt, falls die Koordinatenachsen alle entlang der Symmetriachsen des Körpers sind. **[5 Punkte]**

Lösung:

(a) (i) Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass für jede Bahnkurve die Wirkung extremal ist. Aus dieser Forderung folgen die korrekten Bewegungsgleichungen. In diesem Sinne ist das Hamilton'sche Prinzip also eine elegante Umformulierung der Grundgesetze der Mechanik.

(ii) Der Phasenraum hat zwei Dimensionen pro unabhängigem Freiheitsgrad des Systems, da pro Freiheitsgrad eine generalisierte Koordinate und ein generalisierter Impuls vorhanden ist. Der Phasenraum hat also in diesem Fall $2 \cdot (3 \cdot 3 - 2) = 14$ Freiheitsgrade.

(b) Das Integral hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab, da

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}(\tau)) \tag{4}$$

$$= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \right) \tag{5}$$

$$= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \tag{6}$$

(c) Wir berechnen

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{imn} a_m b_n + a_j b_j a_k b_k \tag{7}$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) a_j b_k a_m b_n + a_j b_j a_k b_k \tag{8}$$

$$= a_j a_j b_k b_k - a_j b_j a_k b_k + a_j b_j a_k b_k \tag{9}$$

$$= a_j a_j b_k b_k = \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2}. \tag{10}$$

(d) Mit der totalen Ableitung gilt

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

Einsetzen der Hamilton Gleichungen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = \{f, H\}$$

(e) Berechne

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{v}) = (\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}) \cdot (\dot{q}, \dot{p}) = \frac{\partial}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial p}\dot{p}$$

Einsetzen der Hamilton Gleichung ergibt

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{v}) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

(f) Berechne unter Verwendung von (d)

$$\vec{L'}^2 = m^2(R\vec{r} \times R\dot{\vec{r}})^2 = m^2[(R\vec{r})^2(R\dot{\vec{r}})^2 - (R\vec{r} \cdot R\dot{\vec{r}})^2] = m^2[(\vec{r})^2(\dot{\vec{r}})^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2] = m^2(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = \vec{L}^2$$

Da das Skalarprodukt von Vektoren Koordinatenunabhengig ist (bei Orthonormalsystemen), wegen

$$\vec{a'} \cdot \vec{b'} = R\vec{a} \cdot R\vec{b} = (R\vec{a})^T R\vec{b} = a^T (R^T R)\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

(g) Nach Definition des Traegheitstensors gilt fuer alle Nebendiagonalelementre

$$I_{12} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(\phi)\cos(\phi) = 0 = I_{21}, \tag{11}$$

$$I_{13} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \cos(\phi) = 0 = I_{31}, \tag{12}$$

$$I_{23} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sin(\phi) = 0 = I_{32}, \tag{13}$$

da, ρ nicht von ϕ abhängt, falls man die 3. Achse nach der Symmetriachse richtet und in Zylinderkoordinaten transformiert.

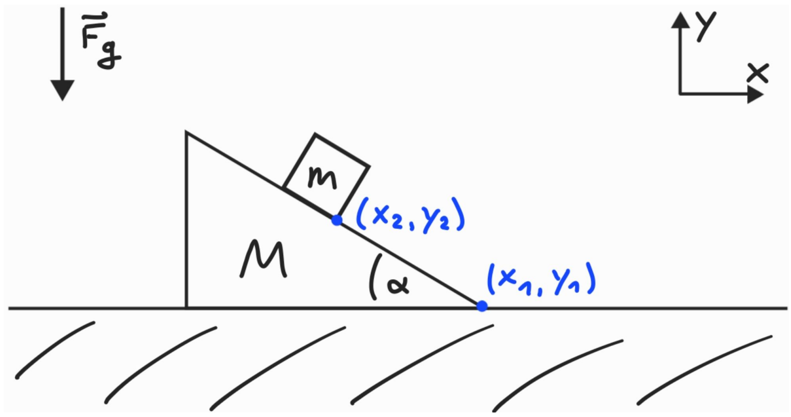

Abbildung 1: Anordnung aus Aufgabe 2

2 Masse auf rutschendem Keil

[40 Punkte]

Ein Block der Masse m gleite reibungsfrei auf einem Keil der Masse M mit Neigungswinkel α. Der Keil gleitet wiederum reibungsfrei über einen Tisch bei $y = 0$. Die Anordnung ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Bewegung finde ausschließlich in der x-y-Ebene statt. In kartesischen Koordinaten beschreiben wir die Orte der beiden Objekte durch die Koordinaten (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2) der unteren rechten Ecke des Keils bzw. des Blocks.

(a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen in den angegebenen kartesischen Koordinaten auf. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? **[6 Punkte]**

(b) Berechnen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten x_1, x_2. **[8 Punkte]**

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für Keil und Block auf. Am Ende soll in jeder Bewegungsgleichung nur noch eine der generalisierten Koordinaten (bzw. ihre zeitlichen Ableitungen) auftreten. **[14 Punkte]**

Hinweis: Sie können sich Arbeit beim Auflösen der Gleichungen ersparen, indem Sie die Impulserhaltung in x-Richtung verwenden.

Zwischenergebnis:

$$\ddot{x}_2 = \frac{g\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)(1 + \frac{m}{M})}, \tag{14}$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g\tan(\alpha)}{\frac{M}{m} + \tan^2(\alpha)(1 + \frac{M}{m})}. \tag{15}$$

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen Keil und Klotz ruhen. Außerdem gelte $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter diesen Anfangsbedingungen. **[4 Punkte]**

(e) Betrachten Sie die Lösungen aus (d) in den Grenzfällen $m \gg M$ bzw. $m \ll M$. **[8 Punkte]**

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie bei (e), dass

$$\frac{\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{2}\sin(2\alpha). \tag{16}$$

Hierfür können Sie die trigonometrische Identität

$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \tag{17}$$

ohne Beweis verwenden.

Lösung:

(a) Mit

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \tag{18}$$

lauten die Zwangsbedingungen

$$g_1 = (x_1 - x_2)\tan(\alpha) + (y_1 - y_2) = 0 \tag{19}$$

und

$$g_2 = y_1 = 0. \tag{20}$$

Das System hat $2 \cdot 2 - 2 = 2$ Freiheitsgrade, kann also durch zwei generalisierte Koordinaten beschrieben werden.

(b) Als generalisierte Koordinaten wählen wir einfach x_1 und x_2. Die y-Koordinaten ersetzen wir mit Hilfe von $y_1 = 0$ und $y_2 = (x_1 - x_2)\tan(\alpha)$. Die Lagrange-Funktion ist dann

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\tan^2(\alpha)) - mg(x_1 - x_2)\tan(\alpha) \tag{21}$$

$$= \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2(1 + \tan^2(\alpha)) + \dot{x}_1^2\tan^2(\alpha) - 2\dot{x}_1\dot{x}_2\tan^2(\alpha)) - mg(x_1 - x_2)\tan(\alpha) \tag{22}$$

.

(c) Die Lagrange-Gleichungen 2. Art liefern

$$(M + m\tan^2(\alpha))\ddot{x}_1 - m\tan^2(\alpha)\ddot{x}_2 = -mg\tan(\alpha), \tag{23}$$

$$m(1 + \tan^2(\alpha))\ddot{x}_2 - m\tan^2(\alpha)\ddot{x}_1 = mg\tan(\alpha). \tag{24}$$

Die Impulserhaltung in x-Richtung

$$M\dot{x}_1 = -m\dot{x}_2 \tag{25}$$

liefert durch erneute zeitliche Ableitung

$$M\ddot{x}_1 = -m\ddot{x}_2. \tag{26}$$

Wir eliminieren damit $\ddot{x}_1$ in Gleichung (23) und erhalten

$$(M + m\tan^2(\alpha))\frac{m}{M}\ddot{x}_2 + m\tan^2(\alpha)\ddot{x}_2 = mg\tan(\alpha). \tag{27}$$

Durch Umstellen kommen wir auf

$$\ddot{x}_2 = \frac{g\tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)(1 + \frac{m}{M})} \tag{28}$$

für die Beschleunigung des Blocks. Zusammen mit Gleichung (26) folgt daraus direkt die Beschleunigung des Keils

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g\tan(\alpha)}{\frac{M}{m} + \tan^2(\alpha)(1 + \frac{M}{m})}. \tag{29}$$

(d) Doppelte zeitliche Integration der Bewegungsgleichungen liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$x_2 = \frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)(1+\frac{m}{M})}t^2, \tag{30}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{\frac{M}{m}+\tan^2(\alpha)(1+\frac{M}{m})}t^2 + x_0. \tag{31}$$

(e) Für $m \gg M$ ist

$$x_2 \approx \frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)\frac{m}{M}}t^2 = \frac{M}{2m}\frac{g}{\tan(\alpha)}t^2 \tag{32}$$

und

$$x_1 \approx -\frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)}t^2 + x_0 = -\frac{1}{2}\frac{g}{\tan(\alpha)}t^2 + x_0. \tag{33}$$

Wir zeigen nun die Aussage aus dem Hinweis. Es gilt

$$\frac{\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)} = \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha). \tag{34}$$

Damit erhalten wir im Grenzfall $m \ll M$, dass

$$x_2 \approx \frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}t^2 = \frac{g}{4}\sin(2\alpha)t^2 \tag{35}$$

und

$$x_1 \approx -\frac{1}{2}\frac{g\tan(\alpha)}{\frac{M}{m}+\tan^2(\alpha)\frac{M}{m}}t^2 + x_0 = -\frac{g}{4}\frac{m}{M}\sin(2\alpha)t^2 + x_0. \tag{36}$$

3 Ballspielen auf einem Karussell

[35 Punkte]

Wir betrachten ein kreisförmiges, im Ursprung zentriertes Karussell mit Radius R, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w in der x-y-Ebene dreht. Person A steht ganz am Rand auf dem Karussell und Person B steht in der Mitte des Karussells. In dem Moment, wenn sich Person A am Ort $(R, 0)$ befindet, wirft sie Person B einen Ball zu. Der Ball soll nach der Zeit T bei Person B (d.h. im Ursprung) ankommen.
Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor, mit dem der Ball dafür geworfen werden muss,

(a) aus Sicht eines Inertialsystems; und

(b) aus Sicht eines mit w um den Ursprung rotierenden beschleunigten Bezugssystems (also ein System, in dem das Karussell ruht).

(**Hinweis:** Berücksichtigen Sie bei (b) Coriolis- und Zentrifugalkraft und führen Sie an geeigneter stelle die Variable $\xi = x' + iy'$ ein.)

Lösung

(a) Aus der Sicht des Inertialsystems muss lediglich die momentane Tangentialgeschwindigkeit $wR\vec{e_y}$kompensiert werden. Mit $v_x = -R/T$ gilt dann

$$\vec{v} = -\frac{R}{T}\vec{e_x} - wR\vec{e_y}$$

(b) Waehle die rotierenden Basisvektoren des rotierenden Bezugssystems so, dass sie bei $t = 0$ mit den Basisvektoren des Inertialsystems uebereinstimmen. Im mitrotierenden System sehen die Bewegungsgleichungen wie folgt aus (der Strich bei den Koordinaten wird weggelassen)

$$\ddot{\vec{r}} = -2(\vec{w} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

Explizit ergibt das dann

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2w \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} - w\vec{w} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Sodass dann jeweils

$$\ddot{x} = 2w\dot{y} + w^2 x$$

$$\ddot{y} = -2w\dot{x} + w^2 y$$

Addiert man die Gleichungen auf, wobei wir die 2. mit i multiplizieren, folgt

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -2iw(\dot{x} + i\dot{y}) + w^2(x + iy)$$

Mit Variablenumbenennung zu $\xi = x + iy$ ergibt das

$$\ddot{\xi} + 2iw\dot{\xi} - w^2\xi = 0$$

Ansatz mit

$$\xi = e^{\Omega t} \quad \Rightarrow \Omega^2 + 2iw\Omega - w^2 = (\Omega + iw)^2 = 0$$

Da eine doppelte Loesung fuer Ω vorliegt folgt als Ansatz

$$\xi = Ae^{-iwt} + Bte^{-iwt}$$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = R$ folgt

$$\dot{\xi}(0) = -iwR + B \quad \Rightarrow B = \dot{x}(0) + i(wR + \dot{y}(0))$$

Damit diese Bahn durch den Ursprung geht

$$\xi(T) = Re^{-iwT} + BTe^{-iwT} = 0 \quad \Rightarrow T = -\frac{R}{B} = -\frac{R}{\dot{x}(0) + i(wR + \dot{y}(0))}$$

Da die Zeit ein reeller Parameter ist, muss $\dot{y}(0) = -wR$ sein und uebrig bleibt $\dot{x}(0) = -\frac{R}{T}$

4 BONUS 1: Masse auf rotierender Ebene

[30 Punkte]

Betrachten Sie die Ebene E im 3-Dimensionalen Raum, welche im Winkel $\pi/4$ zur xy-Ebene orientiert ist, durch den Ursprung geht und mit Winkelgeschwindigkeit w um die z-Achse rotiert. Eine Probemasse m soll nun in seiner Bewegung auf die Ebene E beschränkt sein. Diese Masse sei außerdem der Gravitationskraft $\vec{F_g} = -mg\vec{e_z}$ ausgesetzt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangegleichungen 1.Art die Bewegungsgleichungen einmal im Inertialsystem und einmal in einem mitortierenden Bezugssystem ihrer Wahl. Vereinfachen Sie diese insoweit, als dass die jeweiligen Zwangsbedingungen eingesetzt sind.

Lösung

(a) Im Inertialsystem ist mit Hess'scher Normalform die Zwangsbedingung dadurch gegeben, dass

$$\begin{pmatrix} \cos(wt)\sin(\theta) \\ \sin(wt)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

wobei $\theta = \pi/4$, sodass sich die Zwangsbedingung schreiben laesst als

$$x\cos(wt) + y\sin(wt) + z = 0$$

Damit lassen sich die Bewegungsgleichungen formulieren

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{m} \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ \sin(wt) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der z-Komponente folgt mit der Zwangsbedingung

$$\lambda/m = \ddot{z} + g = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x\cos(wt) + y\sin(wt)) + g$$

Sodass dann die zu loesenden Differentialgleichungen folgende Gestalt annehmen

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \left(g - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x\cos(wt) + y\sin(wt)) \right) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Waehle fuer das Bezugssystem ein solches, sodass $\vec{e_z}'$ normal zur Ebene zeigt, und $\vec{e_x}'$ so, dass dieser sich nur in der xy befindet. $\vec{e_y}'$ wird dann so gewaehlt, dass dieser orthogonal zu den anderen beiden ist un in positive z-Achse zeigt. Im mitrotierenden Bezugssystem gilt dann fuer die Zwangsbedingung

$$g(x', y', z') = z' = 0$$

Ausserdem gilt

$$\vec{e_z} = 1/\sqrt{2}\vec{e_y}' + 1/\sqrt{2}\vec{e_z}'$$

Damit gilt dann in den Koordinaten des rotierenden Bezugssystems

$$\vec{F_g} = -mg(1/\sqrt{2}\vec{e_y}' + 1/\sqrt{2}\vec{e_z}') \qquad \vec{w} = w(1/\sqrt{2}\vec{e_y}' + 1/\sqrt{2}\vec{e_z}')$$

Sodass wir vektoriell aufschreiben koennen

$$m\ddot{\vec{r}}' = -mg\vec{e_z} - m(\vec{w} \times \dot{\vec{r}}') - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}') + \lambda \nabla' g$$

Komponentenweise dann

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{w}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} - \frac{w^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) + \frac{\lambda}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also Einsetzen der Zwangsbedingung $z' = 0$ liefert fuer x', y'

$$\ddot{x}' = \frac{w}{\sqrt{2}}\dot{y}' + w^2 x'$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{w}{\sqrt{2}}\dot{x}' + \frac{w^2}{2}y'$$

5 BONUS 2: Schief rotierender Zylinder

[25 Punkte]

Es sei ein Zylinder mit Traegheitstensor Θ gegeben, der in seinem Hauptachsensystem die Gestalt $\Theta = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$ hat. Dieser soll nun so liegen, dass sein Schwerpunkt mit dem Ursprung (unseres Inertialsystems) zusammenfällt und seine Symmetrieachse mit der z-Achse des Inertialsystems den Winkel $\theta(t)$ einschließt. Der Zylinder rotiere um die z-Achse des Inertialsystems mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$.

(a) Bestimmen Sie den Drehimpuls und die kinetsche Energie dieses Systems (Hinweis: benutzen Sie, dass $\vec{w} = \dot{\theta}\vec{e_1} + \dot{\phi}\vec{e_z}$)

(b) Nun sei θ =const. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls keine Erhaltungsgroesse ist, falls $\dot{\phi} \neq 0$

Lösung

(a) Es gilt

$$\vec{e_z} = \cos(\theta)\vec{e_3} - \sin(\theta)\vec{e_2}$$

Damit ist

$$\vec{w} = \dot{\theta}\vec{e_1} + \dot{\phi}\vec{e_z}$$

Bezüglich der Basis des Hauptachsensystems ist dann der Koordinatenvektor wie folgt

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi}\sin(\theta) \\ \dot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Der Drehimpulsvektor ist somit

$$\vec{L} = \Theta\vec{w} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\theta} \\ -I_1\dot{\phi}\sin(\theta) \\ I_3\dot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die kinetische Energie errechnet sich somit zu

$$T = \frac{1}{2}\vec{w}^T\Theta w = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 I_1 + \dot{\phi}^2(I_1\sin^2(\theta) + I_3\cos^2(\theta)))$$

(b) Ableiten ergibt unter der Produktregel und Benutzung der Tatsache, dass fuer die Koerperfesten Basisvektoren

$$\dot{\vec{e_i}} = \vec{w} \times \vec{e_i}$$

gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_1\ddot{\phi}\sin(\theta) \\ I_3\ddot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\phi}\sin(\theta) \\ \dot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -I_1\dot{\phi}\sin(\theta) \\ I_3\dot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)(I_1 - I_3) \\ -I_1\ddot{\phi}\sin(\theta) \\ I_3\ddot{\phi}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Am Äufhaengepunkt"wird also ein Drehmoment aufgebracht, um zu verhindern, dass durch die Fliehkraft sich der Zylinder um $\vec{e_1}$ dreht.