# Übungsblatt 4 - Lösung

## 1 Pirouette ∗

(a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente $I_3$ bezüglich der z-Achse der Figuren aus Abbildung 1. Die großen Kugeln haben Radius $R$ und Masse $M$, die kleinen Kugeln Radius $r$ und Masse $m$. Die Massendichte $\rho$ der Kugeln ist homogen.
**Hinweis:** Die Hauptträgheitsmomente einer Vollkugel mit Masse $M$ und Radius $R$ sind $I = \frac{2}{5}MR^2$.

(b) Vergleichen Sie nun die Winkelgeschwindigkeit $\omega$ der beiden Figuren bei einer Drehung um die $z$-Achse mit gleich großem Drehimpuls $\vec{L} = L_z\hat{e}_z$.

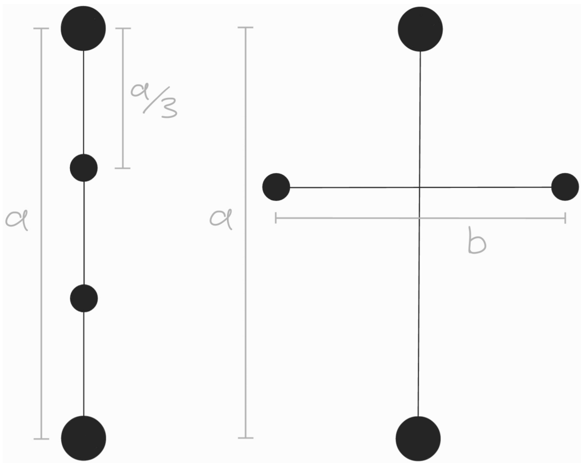


Abbildung 1: Modell einer Pirouette, mit angelegten (links) und ausgestreckten Armen (rechts).

**Lösung:**

(a) Offenbar sind die Trägheitsmomente der beiden Figuren

$$I_{links} = \frac{4}{5}(MR^2 + mr^2), \tag{1}$$
$$I_{rechts} = \frac{4}{5}(MR^2 + mr^2) + mb^2/2, \tag{2}$$

wobei wir für die rechte Figur den Satz von Steiner verwendet haben.

(b) Da die beiden Figuren gleich großen Drehimpuls $L_z = I_z\omega$ haben, folgt

$$I_{links}\omega_{links} = I_{rechts}\omega_{rechts} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{I_{links}}{I_{rechts}} = \frac{\omega_{rechts}}{\omega_{links}}. \tag{3}$$

Nach den Ergebnissen aus (a) gilt

$$I_{rechts} > I_{links} \tag{4}$$

und somit

$$\omega_{links} > \omega_{rechts}. \tag{5}$$

## 2 Trägheitstensor eines homogenen Ellipsoids $**$

Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Ellipsoids der Masse M mit den Hauptträgheitsachsen $a$, $b$, $c$.
**Hinweis:** Der Ellipsoid geht aus einer Einheitskugel durch Streckung entlang der drei Raumrichtungen um die Längen der jeweiligen Halbachsen hervor:

$$x \to ax \; ; \;\; y \to by \; ; \;\; z \to cz$$

Passen Sie die Rechnung für eine Einheitskugel durch entsprechende Ersetzungen an.
Sie dürfen außerdem

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \sin^3(x) = \frac{4}{3} \tag{6}$$

verwenden.
**Lösung:**

Wir führen in der Rechnung für $I_z$ einer Einheitskugel die Ersetzung aus dem Hinweis durch und erhalten für die Hauptträgheitsmomente des Ellipsoids

$$\begin{aligned}
I_z &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \; r^2 \sin(\theta)(a^2x^2 + b^2y^2) && (7)\\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \; r^4 \sin(\theta)(a^2 \cos^2(\phi)\sin^2(\theta) + b^2 \sin^2(\phi)\sin^2(\theta)) && (8)\\
&= \frac{4}{3}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}r \; r^4 (a^2\cos^2(\phi) + b^2\sin^2(\phi)) && (9)\\
&= \frac{4}{15}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \; (a^2\cos^2(\phi) + b^2\sin^2(\phi)) = \frac{4\pi}{15}\rho(a^2+b^2) = \frac{M}{5}(a^2+b^2), && (10)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\rho = M/V$ und $V = 4\pi/3$ verwendet haben. Insgesamt gilt also

$$I = \frac{M}{5}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

## 3 Symmetrien des Trägheitstensors ***

Die Matrixelemente des Trägheitstensors sind gegeben durch

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}^2 - x_i x_j)\,\mathrm{d}V.$$

(a) Leiten Sie her, dass sich $I$ unter einer Rotation (oder Dreh-Spiegelung) $R \in O(3)$, d.h. unter der Koordinatentransformation

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r},\ bzw.\ \ x_i \to x_i' = R_{ij}x_j,$$

wie ein Tensor verhält, also dass $I$ gemäß

$$I \to I' = RIR^T\ ,\ bzw.\ \ I_{ij} \to I'_{ij} = R_{ik}R_{jm}I_{km}$$

transformiert. Zu zeigen ist also

$$\int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}'^{\,2} - x_i'x_j')\,\mathrm{d}V = R_{ik}R_{jm}I_{km}. \tag{12}$$

(Hier wird Summenkonvention verwendet.)

**Hinweis:** Überlegen Sie sich, wie sich $\vec{r}^2$ unter Rotation (oder Dreh-Spiegelung) verhält. Verwenden Sie außerdem, dass $R$ eine orthogonale Matrix ist, d.h. dass ihre Zeilenvektoren zueinander orthonormal sind. Wie können Sie dies über die Matrixelemente $R_{uv}$ formulieren?

(b) Betrachten Sie nun jeweils einen starren Körper mit folgender Symmetrieeigenschaft:
(i) Symmetrie unter Spiegelung an der $x$-$y$-Ebene
(ii) Symmetrie unter Drehung um den Winkel $\pi$ um die $z$-Achse
(iii) Symmetrie unter Drehung um einen beliebigen Winkel $\phi$ um die $z$-Achse.

Leiten Sie unter Verwendung von (a) für die drei genannten Fälle jeweils folgende Eigenschaften des Trägheitstensors her:
(i) $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$
(ii) $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$
(iii) $I_{11} = I_{22}$ und $I_{ij} = 0$ für $i \neq j$

**Hinweis:** Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

beschreibt eine Spiegelung an der $x$-$y$-Ebene und

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

eine Drehung um den Winkel $\phi$ um die $z$-Achse. Bei (iii) bietet es sich an, nicht über (a), sondern direkt über das Integral in der Definition von $I_{ij}$ zu argumentieren.

**Lösung:**

(a) Zuerst überlegen wir uns, dass $\vec{r}^2$ invariant unter Rotation (oder Dreh-Spiegelung) ist, d.h. es gilt $\vec{r}^2 = \vec{r}'^{\,2}$. Außerdem stellen wir fest, dass wir die Orthonormalität der Zeilenvektoren von $R$ formulieren können als

$$R_{ik}R_{jk} = \delta_{ij}, \tag{15}$$

da die linke Seite dem Skalarprodukt des $j$-ten und $k$-ten Zeilenvektors von $R$ entspricht. Mit diesen Erkenntnissen berechnen wir

$$I'_{ij} = \int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}'^{\,2} - x_i'x_j')\,\mathrm{d}V = \int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}^2 - R_{ik}x_kR_{jm}x_m)\,\mathrm{d}V \tag{16}$$

$$= \int \rho(\vec{r})(R_{ik}R_{jk}\vec{r}^2 - R_{ik}x_kR_{jm}x_m)\,\mathrm{d}V = \int \rho(\vec{r})(R_{ik}R_{jm}\delta_{km}\vec{r}^2 - R_{ik}x_kR_{jm}x_m)\,\mathrm{d}V \tag{17}$$

$$= R_{ik}R_{jm}\int \rho(\vec{r})(\delta_{km}\vec{r}^2 - x_kx_m)\,\mathrm{d}V = R_{ik}R_{jm}I_{km}. \tag{18}$$

(b) (i) Sei

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Die Symmetrie zusammen mit (a) liefert

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = SIS^T = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & -I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

also folgt $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$.

(ii) Wir gehen analog zu (i) vor, nur verwenden wir nun $R(\pi)$ anstatt von $S$. Dies führt auf

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = R(\pi)I(R(\pi))^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & -I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

also folgt wieder $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$.

(iii) Hier hängt $\rho$ nicht von $\phi$ ab, d.h. in Zylinderkoordinaten gilt $\rho(\vec{r}) = \rho\overline{r}, z$. Dann ist

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\overline{r} \int \mathrm{d}z\, r(y^2 + z^2)\rho(\overline{r}, z) \tag{23}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\overline{r} \int \mathrm{d}z\, \rho(\overline{r}, z) r(r^2 \sin^2(\phi) + z^2) \tag{24}$$

$$= \int \mathrm{d}\overline{r} \int \mathrm{d}z\, \rho(\overline{r}, z) r(r^2\pi + 2\pi z^2) \tag{25}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\overline{r} \int \mathrm{d}z\, \rho(\overline{r}, z) r(r^2 \cos^2(\phi) + z^2) \tag{26}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\overline{r} \int \mathrm{d}z\, r(x^2 + z^2)\rho(\overline{r}, z) = I_{22}. \tag{27}$$

Außerdem erkennt man, dass

$$I_{12} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \sin(\phi)\cos(\phi) = 0 = I_{21}, \tag{28}$$

$$I_{13} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \cos(\phi) = 0 = I_{31}, \tag{29}$$

$$I_{23} \propto \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \sin(\phi) = 0 = I_{32}, \tag{30}$$

also ist $I_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

**Alternativ** (aber unangenehm):

Die Gleichheit

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = R(\phi)I(R(\phi))^T \tag{31}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ... \tag{32}$$

ist erfüllt, falls $I_{11} = I_{22}$ und $I_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

# 4 Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers ***

Wir betrachten einen starren Körper der Gesamtmasse M, der in Kugelkoordinaten gegeben ist durch die Massendichte

$$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const.} & \text{für } r \le R(\theta) \\ 0 & \text{für } r > R(\theta) \end{cases},$$

mit

$$R(\theta) = R_0(1 + k\cos(\theta)).$$

Berechnen Sie $\rho_0$ und die drei Hauptträgheitsmomente.
**Hinweis:** Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente, indem Sie $I_3$ und $I_1 + I_2 + I_3$ berechnen. Verwenden Sie zusätzlich das Resultat aus Aufgabe 3 b) bezüglich der hier vorliegenden Symmetrie. Außerdem dürfen Sie

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ (1 + k\cos(\theta))^5 \sin^3(\theta) = \frac{12k^4 + 56k^2 + 28}{21} \tag{33}$$

und

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ (1 + k\cos(\theta))^5 \sin(\theta) = \frac{6k^4 + 20k^2 + 6}{3} \tag{34}$$

verwenden.
**Lösung:**

Zuerst berechnen wir das Volumen

$$V = \int \mathrm{d}V = \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{R(\theta)} \mathrm{d}r\ r^2 \sin(\theta) \tag{35}$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin(\theta) R^3(\theta) = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ \sin(\theta) R_0^3 (1 + k\cos(\theta))^3 \tag{36}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R_0^3 \int_{-1}^1 \mathrm{d}u (1 + ku)^3 = \frac{2}{3}\pi R_0^3 \left[\frac{1}{4k}(1 + ku)^4\right]_{u=-1}^1 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 (1 + k^2), \tag{37}$$

wobei wir $u = \cos(\theta)$ substituiert haben. Damit ist

$$\rho_0 = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R_0^3 (1 + k^2)}. \tag{38}$$

Für $I_z$ erhalten wir

$$I_z = \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{R(\theta)} \mathrm{d}r\ r^2 \sin(\theta)(x^2 + y^2) \tag{39}$$

$$= \rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{R(\theta)} \mathrm{d}r\ r^4 \sin^3(\theta) \tag{40}$$

$$= \frac{2\pi}{5}\rho_0 R_0^5 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta (1 + k\cos(\theta))^5 \sin^3(\theta) \tag{41}$$

$$= \frac{3MR_0^2}{10(1 + k^2)} \left(\frac{12k^4 + 56k^2 + 28}{21}\right) \tag{42}$$

$$= \frac{MR_0^2}{5(1 + k^2)} \left(\frac{6k^4 + 28k^2 + 14}{7}\right) \tag{43}$$

$$= \frac{2MR_0^2}{5(1 + k^2)} \left(\frac{3}{7}k^4 + 2k^2 + 1\right) \tag{44}$$

Außerdem ist

$$I_x + I_y + I_z = 2\int \mathrm{d}V \rho r^2 = 2\rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R(\theta)} \mathrm{d}r\ r^4 \sin(\theta) \tag{45}$$

$$= 2\rho_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R(\theta)} \mathrm{d}r\ r^4 \sin(\theta) \tag{46}$$

$$= \frac{4\pi}{5}\rho_0 R_0^5 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta (1 + k\cos(\theta))^5 \sin(\theta) \tag{47}$$

$$= \frac{3MR_0^2}{5(1+k^2)}\left(\frac{6k^4 + 20k^2 + 6}{3}\right) \tag{48}$$

$$= \frac{MR_0^2}{5(1+k^2)}(6k^4 + 20k^2 + 6). \tag{49}$$

Letztendlich erhalten wir

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z - I_z) \tag{50}$$

$$= \frac{MR_0^2}{5(1+k^2)}(3k^4 + 10k^2 + 3) - \frac{MR_0^2}{5(1+k^2)}\left(\frac{3}{7}k^4 + 2k^2 + 1\right) \tag{51}$$

$$= \frac{MR_0^2}{5(1+k^2)}\left(\frac{18}{7}k^4 + 8k^2 + 2\right) \tag{52}$$

$$= \frac{2MR_0^2}{5(1+k^2)}\left(\frac{9}{7}k^4 + 4k^2 + 1\right). \tag{53}$$

# 5 Sphärisches Pendel mit variabler Länge $**$

Betrachten Sie ein Pendel mit Punktmasse $m$ und masselosem Faden, dessen Länge $R = R(t)$ zeitabhängig ist. Außerdem soll das Pendel i.A. nicht nur in einer Ebene, sondern im 3-dimensionalen Raum schwingen.

(a) Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. Was ist die Anzahl der Freiheitsgrade? Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
**Hinweis:** Die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten lautet

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi.$$

(b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H$ und die Energie $E$ und zeigen Sie damit explizit, dass $H$ nicht der Gesamtenergie des Systems entspricht. Woran liegt das?
Berechnen Sie außerdem $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ und zeigen Sie, dass die Energie im Spezialfall $R(t) = \text{const.}$ erhalten ist.

**Loesung**

(a) In Kugelkoordinaten lautet die Lagrange Funktionm

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin(\theta)^2)) - mgr\cos(\theta)$$

Zu jeder Zeil gibt $R(t)$ die Laenge des Fadens an, mithin also auch die Koordinate $r$. Das System wird dabei immer nur von $\theta, \phi$ beschrieben, da $R(t)$ vorgegeben ist, und zwei Freiheitsgrade verbleiben. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$mR^2\ddot{\theta} + 2mR\dot{R}\dot{\theta} = mR^2\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + mgR\sin(\theta)$$

$$mR^2\ddot{\phi}\sin(\theta)^2 + 2mR^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) + 2mR\dot{R}\dot{\phi}\sin(\theta)^2 = 0$$

(b) Die Energie lautet

$$E = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin(\theta)^2)) + mgr\cos(\theta)$$

Die Hamilton-Funktion errechnet sich dabei als

$$H = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{\theta}} + \dot{\phi}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\dot{\phi}} - L = mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\phi}^2\sin(\theta)^2 - (T - U) = E - m\dot{R}^2$$

Die Hamilton-Funktion unterscheidet sich von der Energie, da die Zwangsbedingung $r - R(t) = 0$ rheonom ist. Nun ist

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m(\dot{R}\ddot{R} + R\dot{R}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin(\theta)^2)) + mR^2(\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\phi}\ddot{\phi}\sin(\theta)^2 + \dot{\phi}^2\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)) + mg(\dot{R}\cos(\theta) - R\dot{\theta}\sin(\theta))$$

Durch Einsetzen der Bewegungsgleichungen vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{R}(\ddot{R} + g\cos(\theta) - R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}\sin(\theta)^2)$$

Falls die Fadenlaenge konstant ist, gilt $\dot{R} = 0$, sodass dann $E = const.$ ist.

# 6 Freies relativistisches Teilchen ***

Ein freies relativistisches Teilchen wird durch die Lagrange-Funktion

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen im Lagrange- sowie im Hamilton-Formalismus auf und lösen Sie diese.

**Loesung:**

(a) Die kanonischen Impulse koennen vektorartig geschrieben werden zu einem $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Analog ist $\vec{q} = \vec{r}$. Damit ist

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{m\dot{\vec{q}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}}}$$

Die Hamilton Funktion lautet damit

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \dot{\vec{q}}\vec{p} - L = \dot{\vec{q}}\frac{m\dot{\vec{q}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}}}$$

Nun beobachtet man, dass

$$\vec{p}^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} = \frac{m^2\dot{\vec{q}}^2}{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}} = m^2c^2\frac{\dot{\vec{q}}^2/c^2 - 1 + 1}{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}} = -m^2c^2 + \frac{m^2c^2}{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}}$$

Also

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$$

denn im Hamiltonian muss am Ende alles durch die Koordinaten $\vec{p}, \vec{q}$ ausgedrueckt sein. $\dot{\vec{q}}$ darf in diesem Fall nicht mehr auftauchen.

(b) Zunaechst im Lagrange Formalismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{m\dot{\vec{q}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}}} = const. =: \vec{p_0}$$

Betragsmaessigt gilt damit

$$\dot{\vec{q}}^2 = \frac{\vec{p_0}^2c^2}{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}$$

Damit nach dem einsetzen

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\vec{p_0}}{m}\sqrt{1 - \frac{\vec{p_0}^2}{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}} = \frac{\vec{p_0}c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}} \quad \Rightarrow \vec{q} = \frac{\vec{p_0}ct}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}} + \vec{q_0}$$

Nun mit dem Hamilton Formalismus

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const. = \vec{p_0}$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}c^2}{\sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}} = \frac{\vec{p_0}c}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}} = const. \qquad \Rightarrow \vec{q} = \frac{\vec{p_0}ct}{\sqrt{m^2c^2 + \vec{p_0}^2}} + \vec{q_0}$$

Es ergeben sich uebereinstimmende Ergebnisse.

# 7 Aufgabe - Oszillierender Satellit $****$

Sei ein Satellit als starrer Koerper gegeben, bestehend aus zwei Massen $m_1, m_2$ jeweils an den Enden eines masselosen Stabes mit Laenge $l$. Dieser Satellit sei nun im klassischen Gravitationsfeld der Erde auf einem stabilen kreisförmigen Orbit, sowie radial bzgl. des Erdmittelpunktes ausgerichtet. Ermitteln Sie nun die Schwingungsfrequenz $w$ um diese stabile Gleichgewichtslage bei kleinen Auslenkungen.

**Loesung** Da der Satellit im Geostationaeren Orbit ist, ist er auf Hoehe $R =$ Fuer den Schwerpunkt gilt

$$r_1 m_1 = r_2 m_2 \qquad r_1 + r_2 = l$$

Also

$$r_1 = l\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad r_2 = l\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Damit ergibt sich fuer die kinetische Energie (reine Schwingungsenergie)

$$T = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu l^2 \dot{\theta}^2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Fuer die potentielle Energie gilt mit dem Cosinussatz

$$U = -MG\left(\frac{m_1}{\sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(\theta)}} + \frac{m_2}{\sqrt{R^2 + r_2^2 + 2Rr_2\cos(\theta)}}\right)$$

Damit ist

$$L = \frac{1}{2}\mu l^2 \dot{\theta}^2 + MG\left(\frac{m_1}{\sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(\theta)}} + \frac{m_2}{\sqrt{R^2 + r_2^2 + 2Rr_2\cos(\theta)}}\right)$$

Aufstellen der Lagrange Gleichungen ergibt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L = \frac{d}{dt}\mu l^2 \dot{\theta} = \mu l^2 \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -MG\left(\frac{m_1}{(R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(\theta))^{3/2}}(2Rr_1\sin(\theta)) + \frac{m_2}{(R^2 + r_2^2 + 2Rr_2\cos(\theta))^{3/2}}(-2Rr_2\sin(\theta)\right) \\
&= -\frac{MG\sin(\theta) l\mu}{R^2}\left((1 + \frac{r_1^2 - 2Rr_1\cos(\theta)}{R^2})^{-3/2} - (1 + \frac{r_2^2 + 2Rr_2\cos(\theta)}{R^2})^{-3/2}\right) \\
&= -\frac{MG\sin(\theta) l\mu}{R^2}\left((1 - \frac{3}{2}\frac{r_1^2 - 2Rr_1\cos(\theta)}{R^2}) - (1 - \frac{3}{2}\frac{r_2^2 + 2Rr_2\cos(\theta)}{R^2})\right) \\
&= -3\frac{MG}{R^3} l^2 \mu \sin(\theta)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Mit Taylorentwicklung bis zur 1.Ordnung und der Tatsache, dass $r_1^2, r_2^2 \ll R^2$ Damit ergibt sich fuer kleine Ausschlaege

$$\ddot{\theta} = -3\frac{MG}{R^3}\theta \qquad \Rightarrow w = \sqrt{3\frac{MG}{R^3}}$$