Übungsblatt 4

1 Pirouette ∗

(a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_3 bezüglich der z-Achse der Figuren aus Abbildung 1. Die großen Kugeln haben Radius R und Masse M, die kleinen Kugeln Radius r und Masse m. Die Massendichte ρ der Kugeln ist homogen.
Hinweis: Die Hauptträgheitsmomente einer Vollkugel mit Masse M und Radius R sind $I = \frac{2}{5}MR^2$.

(b) Vergleichen Sie nun die Winkelgeschwindigkeit ω der beiden Figuren bei einer Drehung um die z-Achse mit gleich großem Drehimpuls $\vec{L} = L_z\hat{e}_z$.

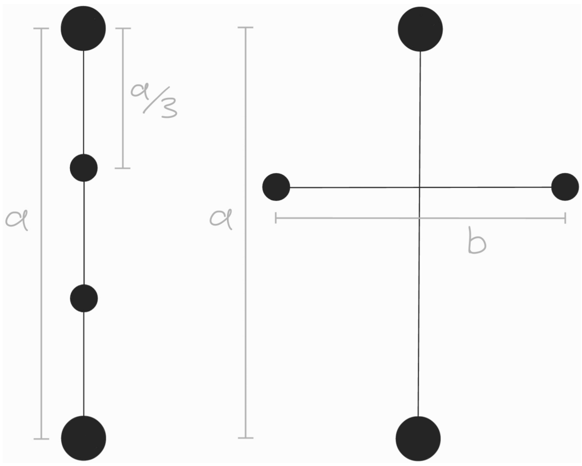

Abbildung 1: Modell einer Pirouette, mit angelegten (links) und ausgestreckten Armen (rechts).

2 Trägheitstensor eines homogenen Ellipsoids ∗∗

Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente eines homogenen Ellipsoids der Masse M mit den Hauptträgheitsachsen a, b, c.
Hinweis: Der Ellipsoid geht aus einer Einheitskugel durch Streckung entlang der drei Raumrichtungen um die Längen der jeweiligen Halbachsen hervor:

$$x \to ax\ ;\ \ y \to by\ ;\ \ z \to cz$$

Passen Sie die Rechnung für eine Einheitskugel durch entsprechende Ersetzungen an.
Sie dürfen außerdem

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \sin^3(x) = \frac{4}{3} \tag{1}$$

verwenden.

3 Symmetrien des Trägheitstensors ***

Die Matrixelemente des Trägheitstensors sind gegeben durch

$$I_{ij} = \int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}^{\,2} - x_i x_j)\,\mathrm{d}V.$$

(a) Leiten Sie her, dass sich I unter einer Rotation (oder Dreh-Spiegelung) $R \in O(3)$, d.h. unter der Koordinatentransformation

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\vec{r}\,,\ \ bzw.\ \ x_i \to x'_i = R_{ij}x_j,$$

wie ein Tensor verhält, also dass I gemäß

$$I \to I' = RIR^T\,,\ \ bzw.\ \ I_{ij} \to I'_{ij} = R_{ik}R_{jm}I_{km}$$

transformiert. Zu zeigen ist also

$$\int \rho(\vec{r})(\delta_{ij}\vec{r}\,'^{\,2} - x'_i x'_j)\,\mathrm{d}V = R_{ik}R_{jm}I_{km}. \tag{2}$$

(Hier wird Summenkonvention verwendet.)

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie sich $\vec{r}^{\,2}$ unter Rotation (oder Dreh-Spiegelung) verhält. Verwenden Sie außerdem, dass R eine orthogonale Matrix ist, d.h. dass ihre Zeilenvektoren zueinander orthonormal sind. Wie können Sie dies über die Matrixelemente R_{uv} formulieren?

(b) Betrachten Sie nun jeweils einen starren Körper mit folgender Symmetrieeigenschaft:
(i) Symmetrie unter Spiegelung an der x-y-Ebene
(ii) Symmetrie unter Drehung um den Winkel π um die z-Achse
(iii) Symmetrie unter Drehung um einen beliebigen Winkel ϕ um die z-Achse.

Leiten Sie unter Verwendung von (a) für die drei genannten Fälle jeweils folgende Eigenschaften des Trägheitstensors her:
(i) $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$
(ii) $I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0$
(iii) $I_{11} = I_{22}$ und $I_{ij} = 0$ für $i \neq j$

Hinweis: Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

beschreibt eine Spiegelung an der x-y-Ebene und

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

eine Drehung um den Winkel ϕ um die z-Achse. Bei (iii) bietet es sich an, nicht über (a), sondern direkt über das Integral in der Definition von I_{ij} zu argumentieren.

4 Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers ∗∗∗

Wir betrachten einen starren Körper der Gesamtmasse M, der in Kugelkoordinaten gegeben ist durch die Massendichte

$$\rho(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const.} & \text{für } r \le R(\theta) \\ 0 & \text{für } r > R(\theta) \end{cases},$$

mit

$$R(\theta) = R_0(1 + k\cos(\theta)).$$

Berechnen Sie ρ_0 und die drei Hauptträgheitsmomente.
Hinweis: Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente, indem Sie I_3 und $I_1 + I_2 + I_3$ berechnen. Verwenden Sie zusätzlich das Resultat aus Aufgabe 3 b) bezüglich der hier vorliegenden Symmetrie. Außerdem dürfen Sie

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ (1 + k\cos(\theta))^5 \sin^3(\theta) = \frac{12k^4 + 56k^2 + 28}{21} \tag{5}$$

und

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\ (1 + k\cos(\theta))^5 \sin(\theta) = \frac{6k^4 + 20k^2 + 6}{3} \tag{6}$$

verwenden.

5 Sphärisches Pendel mit variabler Länge ∗∗

Betrachten Sie ein Pendel mit Punktmasse m und masselosem Faden, dessen Länge $R = R(t)$ zeitabhängig ist. Außerdem soll das Pendel i.A. nicht nur in einer Ebene, sondern im 3-dimensionalen Raum schwingen.

(a) Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. Was ist die Anzahl der Freiheitsgrade? Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
Hinweis: Die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten lautet

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi.$$

(b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion H und die Energie E und zeigen Sie damit explizit, dass H nicht der Gesamtenergie des Systems entspricht. Woran liegt das?
Berechnen Sie außerdem $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ und zeigen Sie, dass die Energie im Spezialfall $R(t) = \text{const.}$ erhalten ist.

6 Freies relativistisches Teilchen ∗∗∗

Ein freies relativistisches Teilchen wird durch die Lagrange-Funktion

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}}$$

beschrieben.

(a) Bestimmen Sie die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen im Lagrange- sowie im Hamilton-Formalismus auf und lösen Sie diese.

7 Aufgabe - Oszillierender Satellit ∗∗∗∗

Sei ein Satellit als starrer Koerper gegeben, bestehend aus zwei Massen m_1, m_2 jeweils an den Enden eines masselosen Stabes mit Laenge l. Dieser Satellit sei nun im klassischen Gravitationsfeld der Erde auf einem stabilen kreisförmigen Orbit, sowie radial bzgl. des Erdmittelpunktes ausgerichtet. Ermitteln Sie nun die Schwingungsfrequenz w um diese stabile Gleichgewichtslage bei kleinen Auslenkungen.