Übungsblatt 3 - Lösung

1 Erhaltungsgrößen des 3-dimensionalen Oszillators ∗

Betrachten Sie einen 3-dimensionalen harmonischen Oszillator mit

$$m\ddot{\vec{r}}(t) + k\vec{r}(t) = 0 \; ; \quad \omega^2 = k/m \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$L_{ij} = m(x_i \dot{x}_j - \dot{x}_i x_j) \tag{2}$$

und

$$A_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{k}{2} x_i x_j, \tag{3}$$

mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$, Erhaltungsgrößen sind.

(b) Leiten Sie her, dass

$$A_{ij}^2 = A_{ii} A_{jj} - \frac{\omega^2}{4} L_{ij}^2,$$

wobei hier keine Summenkonvention verwendet wird.

Lösung:

(a) Aus Gleichung (1) folgt

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}_n = -\frac{k}{m} x_n. \tag{4}$$

Damit ist

$$\dot{L}_{ij} = m(x_i \ddot{x}_j - \ddot{x}_i x_j) = -k(x_i x_j - x_i x_j) = 0. \tag{5}$$

Auch A_{ij} ist erhalten, da

$$\dot{A}_{ij} = \frac{m}{2}(\ddot{x}_i \dot{x}_j + \dot{x}_i \ddot{x}_j) + \frac{k}{2}(\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j) = \frac{1}{2}\dot{x}_j(m\ddot{x}_i + kx_i) + \frac{1}{2}\dot{x}_i(m\ddot{x}_j + kx_j) = 0, \tag{6}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder Gleichung (4) verwendet haben.

(b) Es gilt

$$A_{ij}^2 = \frac{m^2}{4}\dot{x}_i^2 \dot{x}_j^2 + \frac{k^2}{4} x_i^2 x_j^2 + \frac{mk}{2} x_i x_j \dot{x}_i \dot{x}_j =$$
$$\frac{m^2}{4}\dot{x}_i^2 \dot{x}_j^2 + \frac{k^2}{4} x_i^2 x_j^2 + \frac{mk}{4}(\dot{x}_i^2 x_j^2 + x_i^2 \dot{x}_j^2) - \frac{mk}{4}(x_i^2 \dot{x}_j^2 - 2x_i x_j \dot{x}_i \dot{x}_j + \dot{x}_i^2 x_j^2) =$$
$$\left(\frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{k}{2}x_i^2\right)\left(\frac{m}{2}\dot{x}_j^2 + \frac{k}{2}x_j^2\right) - \frac{\omega^2 m^2}{4}(x_i \dot{x}_j - \dot{x}_i x_j)^2 = A_{ii} A_{jj} - \frac{\omega^2}{4} L_{ij}^2.$$

2 Erhaltungssatz der Variationsrechnung $**$

(a) Betrachten Sie das Funktional

$$I[x] = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t,$$

dessen Integrand F nicht explizit von t abhängt. Zeigen Sie, dass dann

$$\dot{x}\frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - F(x,\dot{x})$$

eine Erhaltungsgröße ist, wenn das Funktional $I[x]$ für $x(t)$ extremal ist.
Hinweis: Achten Sie darauf, das totale Differential korrekt auszuführen.

(b) Wenden Sie das Resultat aus (a) auf $F = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ an, also auf den Fall, dass der Integrand eine Lagrange-Funktion ohne explizite Zeitabhängigkeit ist. Welche Erhaltungsgröße folgt daraus?
Hinweis: Verwenden Sie, dass für eine quadratische, homogene Funktion $T(\dot{\vec{q}})$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

Lösung:

(a) Wegen $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{\partial F(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - F(x,\dot{x})\right) = \ddot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = \dot{x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0, \tag{7}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $F(x(t), \dot{x}(t))$ die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt.

(b) Für $F = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q})$ folgt mit (a) und mit Hilfe des Hinweises die Erhaltungsgröße

$$\dot{\vec{q}} \cdot \frac{\partial T(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{\vec{q}}} - (T - U) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} - T + U = 2T - T + U = T + U = E, \tag{8}$$

die wir mit der Energie E identifizieren.

3 Fermat'sches Prinzip $**$

Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass sich ein Lichtstrahl immer so von einem Punkt zum anderen bewegt, dass der dabei zurückgelegte Weg eine minimale optische Länge hat. Wir betrachten nun einen 2-dimensionalen Raum mit Brechungsindex $n(x,y)$, sodass der optische Weg zwischen zwei festen Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben ist durch

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Im Vergleich zur normalen Weglänge muss also nur jedes Wegelement mit dem dortigen Brechungsindex gewichtet werden. Finden Sie $y(x)$ für

(a) $n =$const.

(b) $n = 1/y$, wobei hier nur der Bereich $y > 0$ betrachtet werden soll.

Sie brauchen dabei die Integrationskonstanten **nicht** durch x_1, x_2, y_1, y_2 ausdrücken.

Lösung:

(a) Für n =const. ist das Problem äquivalent zur Bestimmung der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten. Da der Integrand $F(y')$ nicht explizit von y abhängt, ergibt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} =: c \tag{9}$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$y' = \text{const.} =: a, \tag{10}$$

also lautet die Lösung

$$y(x) = ax + b. \tag{11}$$

(b) Mit $n = 1/y$ ist $F(y, y')$ nun explizit abhängig von y, aber immer noch nicht explizit abhängig von x. Wir verwenden also den Erhaltungssatz aus Aufgabe 2 und finden

$$y'\frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} - F(y,y') = \frac{1}{y}\left(\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\right) = -\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} =: \tilde{c}. \tag{12}$$

Mit $c = 1/\tilde{c}$ stellen wir um zu

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{\frac{1}{\tilde{c}^2 y^2} - 1} = \pm\sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \tag{13}$$

Trennung der Variablen liefert

$$x - x_0 = \pm\int \frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y = \mp\sqrt{c^2 - y^2}, \tag{14}$$

woraus schließlich durch Auflösen

$$y(x) = \pm\sqrt{c^2 - (x - x_0)^2} \tag{15}$$

erhalten. Da wir den Bereich $y > 0$ betrachten, wählen wir die positive Lösung. Die Konstanten c und x_0 sind durch $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ bestimmt.

4 Gravity-Hyperloop ∗∗∗

Zwei Orte auf der Erde (Sphäre mit Radius R, Masse M, homogene Dichte ρ, Vom Erdzentrum aus gesehener Winkel α) sollen mit einem Tunnel verbunden werden, sodass allein durch die Gravitationskraft der Erde der Transport von Massen gelingt. Nun soll der Tunnel nicht etwa geradlinig sein, sondern so, dass die Zeit zum durchqueren minimiert wird. Berechnen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung die Durchquerungsdauer T wenn die Form des Tunnels die Zeit extremalisiert (fuer eine Testmasse m).

(a) Sie koennen ohne Herleitung verwenden, dass innerhalb der Erde die radiale Kraft $F(r) = -\frac{4}{3}\pi G\rho m r$ lautet, mit r dem Abstand zum Mittelpunkt. Formulieren Sie das Problem in Polarkoordinaten. Das infinitessimale Wegelement ist hierbei $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Berechnen Sie nun $r'(\theta)$ im extremalisierten Fall. Zur Kontrolle:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R}{r_0} r\sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}$$

wobei r_0 der Mindestabstand zum Erdmittelpunkt ist.

(b) Die vorige Gleichung kann nach $r(\theta)$ aufgeloest werden, dabei entstehen Hypozykloide `https://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid`. Um nur die Durchgangszeit T zu bestimmen, kann dieser Schritt aber auch weggelassen werden, indem im urspruenglichen Integral nach der Zeit, die Integrationsvariable zu r gewechselt wird, und folgende Integralidentitaet benutzt wird (wie schon auf Blatt 1, Aufgabe 10):

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

Lösung:

(a) Analog zum ersten Maxwell-Gesetz

$$\int_{r<R} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{in}}{\epsilon}$$

mit folgt mit der Ersetzung $\frac{Q_{in}}{4\pi\epsilon} \to GM_{in}$, dass

$$\int_{r<R} d\vec{A} \cdot \vec{E}_g = 4\pi G M_{in}(r) \qquad \Rightarrow E(r) = -\frac{1}{4\pi r^2} 4\pi G\rho \frac{4}{3}\pi r^3 = -\frac{4}{3}\pi G\rho r.$$

Das Potential ist somit

$$U(r) = G\rho\frac{4}{3}mr^2 =: \frac{k}{2}r^2$$

In Polarkoordinaten ist die Energie und Geschwindigkeit

$$E = \frac{k}{2}R^2 = \frac{k}{2}r^2 + \frac{m}{2}v^2 = \frac{k}{2}r^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}(R^2 - r^2)}$$

Das Wegelement ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \left(r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right) d\theta^2$$

Damit ist

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{v} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{R^2 - r^2}} d\theta = F(r, r', \theta) d\theta$$

Zu extremalisieren ist dann

$$T[r] = \int_0^T dt = \int_0^\alpha F(r, r', \theta) d\theta$$

Man erkennt, dass F nicht explizit von θ abhaengt, daher ist (wie in Aufgabe 2 (a) gezeigt) folgende Groesse konstant

$$r'\frac{\partial F}{\partial r'} - F = const.$$

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{r'}{\sqrt{(r^2 + r'^2)(R^2 - r^2)}}$$

$$C = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{r'^2}{\sqrt{(r^2 + r'^2)(R^2 - r^2)}} - \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{R^2 - r^2}} \right) = -\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{r^2}{\sqrt{(R^2 - r^2)(r^2 + r'^2)}}$$

Fuer die Stelle r_0 ist $r' = 0$ (Da mindester Abstand zu Erdmittelpunkt, und somit $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$), somit ist

$$C^2 = \frac{m}{k} \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2}$$

Aufloesen nach $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R}{r_0} r \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}$$

(b) Setzt man r' in F ein ergibt dies

$$F = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{r^2}{R^2 - r^2} \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{r_0^2}}$$

Nun kann die extremalisierte Zeit bestimmt werden durch aenderung der Integrationsvariablen von $\theta \to r$, wobei beachtet werden muss, dass aus Symmetrie 2 mal von r_0 zu R integriert werden muss, um die gesamte Durchlaufzeit zu bestimmen :

$$T = \int dt = \int_0^\alpha F(r, r', \theta) d\theta = 2\int_{r_0}^R F(r)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} dr = 2\int_{r_0}^R \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{r^2}{R^2 - r^2} \sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{r_0^2}} \left(\frac{R}{r_0} r \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}} \right)^{-1} dr$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}\left(\frac{R^2 - r_0^2}{r_0^2}\right)} \int_{r_0}^{R} \frac{2rdr}{\sqrt{(R^2 - r^2)(r^2 - r_0^2)}} = \pi \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G\rho}\left(\frac{R^2 - r_0^2}{r_0^2}\right)}$$

Da nach Angabe die Bahn ein Hypozikloid ist, ergibt sich

$$\alpha R = 2\pi \cdot \left(\frac{R - r_0}{2}\right) \quad \Rightarrow r_0 = R\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

Dann ist

$$T = \pi \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}\pi G\rho}\left[\frac{2\alpha}{\pi}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\right]}$$

5 Isoperimetrisches Problem ∗∗∗

Betrachten Sie eine Funktion $y(x)$ die an den Endpunkten $y(a) = y(b) = 0$ verschwindet. Unter der Voraussetzung, dass die Laenge des Graphen konstant (die genaue Laenge muss dabei nicht beachtet werden) ist, beweisen Sie, dass der maximale Flaechinhalt unter der Kurve $y(x)$ dann erreicht wird, wenn $y(x)$ eine Kreisgleichung erfuellt. (Hinweis: Die Laenge eines Graphens ist $\int \sqrt{1 + y'^2}dx$)
Loesung:

Dies ist ein Variationsproblem mit einer Nebenbedingung. Extremalisiert wird also

$$F[y] = \int_a^b ydx + \lambda \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Es kann wieder Resultat von Aufgabe 2 (a) verwendet werden, aber selbst ohne dies ist relativ schnell die Loesung erreichbar. Euler Lagrange auf

$$L(y, y', x) = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$$

angewendet, ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \frac{\lambda y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1$$

Also ist zu loesen mit $u := y'$

$$\lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1 + u^2)^{3/2}$$

Integrieren mit $u = \tan(\theta)$ und $du = d\theta \sec^2(\theta)$ ergibt

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \int \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}} = \int \frac{\sec^2(\theta)d\theta}{(1 + \tan^2(\theta))^{3/2}} = \int \frac{1}{\sec(x\theta)}d\theta = \sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Umstellen und integrieren ergibt

$$y - y_0 = \int \frac{\frac{x - x_0}{\lambda}}{\sqrt{1 - (\frac{x - x_0}{\lambda})^2}}dx = -\lambda\sqrt{1 - \left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right)^2}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\left(\frac{y - y_0}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right)^2 = 1$$

Deutet also auf einen Kreis hin. Die genauen konstanten sind ermittelbar, sind aber nicht von hoher relevanz, da nur nach der Form gefragt wurde.

6 Maximierung Gravitationskraft ****

Es sei eine Masse M gegeben, welche sich stetig verformen laesst, jedoch konstante Dichte ρ und Volumen V besitzt. Sie soll nun am Ursprung eine maximale Gravitationskraft (nach Newton mit Gravitationskonstante G) erzeugen. Bestimmen Sie fuer diesen Fall die Beschleunigung die eine Probemasse m_0 (in z-Richtung) erfaehrt, wenn sie sich am Ursprung befindet. Zur Kontrolle

$$g = \frac{4\pi}{5} G\rho \left(\frac{15M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

Sie koenne davon ausgehen, dass aus Symmetriegruenden, die Form radialsymmetrisch um die z-Achse sein wird. Das Problem ist sowohl in Zylinder- also auch Kugelkoordinaten loesbar.

Loesung:
Die infinitessimale Kraft eines Massenelements dm auf eine Probemasse m_0 in z-Richtung lautet in Kugelkoordinaten

$$\frac{dF}{m_0} = dg = \frac{Gdm}{r^2}\cos(\theta) = \frac{G\cos(\theta)\rho dV}{r^2} = G\rho\sin(\theta)\cos(\theta)drd\theta d\phi$$

wegen

$$dV = r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi$$

Demnach ist die Beschleunigung auf die Probemasse

$$g = \int dg = \int_0^{\pi}\int_0^{\theta_0}\int_0^{r(\theta)} G\rho\sin(\theta)\cos(\theta)drd\theta d\phi = 2\pi G\rho\int_0^{\theta_0} r(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta$$

Dabei muss das Volumen konstant sein

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\theta_0}\int_0^{r(\theta)} r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\theta_0} r(\theta)^3\sin(\theta)d\theta$$

Zu optimieren gilt nun unter dieser Nebenbedingung

$$\bar{g}[r] = \int_0^{\theta_0} L(r, r', \theta)d\theta \qquad \text{wobei} \qquad L = 2\rho r(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) - \lambda\frac{2\pi}{3}r(\theta)^3\sin(\theta)$$

Euler Lagrange ergibt, da L nicht von r' abhaengt

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi(G\rho\sin(\theta)\cos(\theta) - \lambda 2\pi\sin(\theta)r^2) \qquad \Rightarrow r(\theta) = \sqrt{\frac{G\rho}{\lambda}\cos(\theta)}$$

Da

$$r(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Weiterhin muss nun λ ermittelt werden

$$V = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{G\rho}{\lambda}\right)^{3/2}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^{3/2}\sin(\theta)d\theta = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{G\rho}{\lambda}\right)^{3/2}(-\frac{2}{5}\cos(\theta)^{5/2})|_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{15}\left(\frac{G\rho}{\lambda}\right)^{3/2}$$

Also

$$\lambda = G\rho\left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{3/2}$$

Berechnen der Beschleunigung ergibt

$$g = 2\pi G\rho\sqrt{\frac{G\rho}{\lambda}}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^{3/2}\sin(\theta)d\theta = \frac{4\pi}{5}(G\rho)^{3/2}\left(G\rho\left(\frac{15V}{4\pi}\right)^{3/2}\right)^{-1/2} = \frac{4\pi}{5}G\rho\left(\frac{15M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

Vereinfacht man:

$$g_{max} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)^{3/2} G(\rho^2\pi^2 M)^{1/3}$$

So laesst sich das Ergebnis mit dem Fall vergleichen, falls die Form eine Kugel ist.

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow g_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} G(\rho^2\pi^2 M)^{1/3}$$

Die optimale Loesung ist also nur geringfuegig staerke als die im Fall einer Kugel

$$\frac{g_{max}}{g_0} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)^{3/2} = 1.0594...$$