Übungsblatt 3

1 Erhaltungsgrößen des 3-dimensionalen Oszillators $*$

Betrachten Sie einen 3-dimensionalen harmonischen Oszillator mit

$$m\ddot{\vec{r}}(t) + k\vec{r}(t) = 0\ ; \quad \omega^2 = k/m \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$L_{ij} = m(x_i\dot{x}_j - \dot{x}_i x_j) \tag{2}$$

und

$$A_{ij} = \frac{m}{2}\dot{x}_i\dot{x}_j + \frac{k}{2}x_i x_j, \tag{3}$$

mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$, Erhaltungsgrößen sind.

(b) Leiten Sie her, dass

$$A_{ij}^2 = A_{ii}A_{jj} - \frac{\omega^2}{4}L_{ij}^2,$$

wobei hier keine Summenkonvention verwendet wird.

2 Erhaltungssatz der Variationsrechnung $**$

(a) Betrachten Sie das Funktional

$$I[x] = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t,$$

dessen Integrand F nicht explizit von t abhängt. Zeigen Sie, dass dann

$$\dot{x}\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} - F(x, \dot{x})$$

eine Erhaltungsgröße ist, wenn das Funktional $I[x]$ für $x(t)$ extremal ist.
Hinweis: Achten Sie darauf, das totale Differential korrekt auszuführen.

(b) Wenden Sie das Resultat aus (a) auf $F = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ an, also auf den Fall, dass der Integrand eine Lagrange-Funktion ohne explizite Zeitabhängigkeit ist. Welche Erhaltungsgröße folgt daraus?
Hinweis: Verwenden Sie, dass für eine quadratische, homogene Funktion $T(\dot{\vec{q}})$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T.$$

3 Fermat'sches Prinzip $**$

Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass sich ein Lichtstrahl immer so von einem Punkt zum anderen bewegt, dass der dabei zurückgelegte Weg eine minimale optische Länge hat. Wir betrachten nun einen 2-dimensionalen Raum mit Brechungsindex $n(x, y)$, sodass der optische Weg zwischen zwei festen Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben ist durch

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Im Vergleich zur normalen Weglänge muss also nur jedes Wegelement mit dem dortigen Brechungsindex gewichtet werden. Finden Sie $y(x)$ für

(a) $n =$const.

(b) $n = 1/y$, wobei hier nur der Bereich $y > 0$ betrachtet werden soll.

Sie brauchen dabei die Integrationskonstanten **nicht** durch x_1, x_2, y_1, y_2 ausdrücken.

4 Gravity-Hyperloop ***

Zwei Orte auf der Erde (Sphäre mit Radius R, Masse M, homogene Dichte ρ, Vom Erdzentrum aus gesehener Winkel α) sollen mit einem Tunnel verbunden werden, sodass allein durch die Gravitationskraft der Erde der Transport von Massen gelingt. Nun soll der Tunnel nicht etwa geradlinig sein, sondern so, dass die Zeit zum durchqueren minimiert wird. Berechnen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung die Durchquerungsdauer T wenn die Form des Tunnels die Zeit extremalisiert (fuer eine Testmasse m).

(a) Sie koennen ohne Herleitung verwenden, dass innerhalb der Erde die radiale Kraft $F(r) = -\frac{4}{3}\pi G\rho mr$ lautet, mit r dem Abstand zum Mittelpunkt. Formulieren Sie das Problem in Polarkoordinaten. Das infinitessimale Wegelement ist hierbei $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Berechnen Sie nun $r'(\theta)$ im extremalisierten Fall. Zur Kontrolle:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R}{r_0} r \sqrt{\frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2}}$$

wobei r_0 der Mindestabstand zum Erdmittelpunkt ist.

(b) Die vorige Gleichung kann nach $r(\theta)$ aufgeloest werden, dabei entstehen Hypozykloide `https://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid`. Um nur die Durchgangszeit T zu bestimmen, kann dieser Schritt aber auch weggelassen werden, indem im urspruenglichen Integral nach der Zeit, die Integrationsvariable zu r gewechselt wird, und folgende Integralidentitaet benutzt wird (wie schon auf Blatt 1, Aufgabe 10):

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

5 Isoperimetrisches Problem ***

Betrachten Sie eine Funktion $y(x)$ die an den Endpunkten $y(a) = y(b) = 0$ verschwindet. Unter der Voraussetzung, dass die Laenge des Graphen konstant (die genaue Laenge muss dabei nicht beachtet werden) ist, beweisen Sie, dass der maximale Flaechinhalt unter der Kurve $y(x)$ dann erreicht wird, wenn $y(x)$ eine Kreisgleichung erfuellt. (Hinweis: Die Laenge eines Graphens ist $\int \sqrt{1 + y'^2} dx$)

6 Maximierung Gravitationskraft ****

Es sei eine Masse M gegeben, welche sich stetig verformen laesst, jedoch konstante Dichte ρ und Volumen V besitzt. Sie soll nun am Ursprung eine maximale Gravitationskraft (nach Newton mit Gravitationskonstante G) erzeugen. Bestimmen Sie fuer diesen Fall die Beschleunigung die eine Probemasse m_0 (in z-Richtung) erfaehrt, wenn sie sich am Ursprung befindet. Zur Kontrolle

$$g = \frac{4\pi}{5} G\rho \left(\frac{15M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

Sie koenne davon ausgehen, dass aus Symmetriegruenden, die Form radialsymmetrisch um die z-Achse sein wird. Das Problem ist sowohl in Zylinder- also auch Kugelkoordinaten loesbar.