Übungsblatt 2 - Lösung

1 Rotierendes Bezugssystem ***

Betrachten Sie die Transformation eines Intertialsystems in ein gleichfoermig rotierendes Bezugssystem, wobei die Standardbasisvektoren wie folgt transformiert werden

$$\vec{e_i}' = R\vec{e_i}$$

(a) Beweisen Sie zunaechst, dass fuer $\dot{R}R^T$ ein Vektor $\vec{w}$ exisitert, sodass fuer alle Vektoren $\vec{u}$ gilt

$$\dot{R}R^T\vec{u} = \vec{w} \times \vec{u}$$

Dass dieser Vektor $\vec{w}$ tatsaechlich derjenige Vektor ist, um den sich das Koordinatensystem dreht muessen sie nicht zeigen (Das geht zB, wenn man $R = \cos(wt)I_3 + \sin(wt)(\vec{u} \times \cdot) + (1 - \cos(wt))\vec{u}\vec{u}^T$ ansetzt, mit $\vec{u}$ der normierten Drehachse und w der Winkelgeschwindigkeit), koennen Sie aber von nun an voraussetzen.

(b) Zeigen Sie damit, dass

$$\dot{\vec{e_i}}' = \vec{w} \times \vec{e_i}'$$

(c) Ein und derselbe Vektor kann nun bzgl zwei verschiedene Basen entwickelt werden

$$\vec{r} = x_i\vec{e_i} = x_i'\vec{e_i}'$$

Dabei sind x_i, x_i' jeweils die Koordinatenvektoren des Vektors $\vec{r}$ bzgl. der Orthogonalsysteme. Leiten Sie her, dass gilt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + \vec{w} \times \vec{r}$$

(d) Benutzen Sie diese Tatsache, um die Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssystem herzuleiten. Sie koennen dabei selber entscheiden, ob Sie von Newton oder Lagrange 2. Art Gebrauch nehmen.

Lösung:

(a) Bezugssystemwechsel bei rotierenden Bezugssystemen ist ein Basiswechsel mit einer orthogonalen Rotationsmatrix R:

$$\vec{e_i}' = R\vec{e_i}, \qquad R^TR = I_3$$

Es gilt

$$0 = \frac{d}{dt}RR^T = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T \qquad \Rightarrow \qquad \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T = -(\dot{R}R^T)^T$$

Daher ist $\dot{R}R^T$ antisymmetrisch, somit von der Form

$$\dot{R}R^T = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ausrechnen und Einsetzen:

$$\dot{\vec{e}}_i' = \dot{R}\vec{e_i} = \dot{R}R^T\vec{e_i}' = \dot{R}R^T\vec{e_i}' = \vec{w} \times \vec{e_i}'$$

(c) Ableiten ergibt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + x_i'\dot{\vec{e_i}}' = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + x_i'\vec{w} \times \vec{e_i}' = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + \vec{w} \times x_i'\vec{e_i}' = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + \vec{w} \times \vec{r}$$

(d) Der Lagrangian wird in den neuen Koordinaten zu

$$L = \frac{m}{2}\dot{x_i}'\dot{x_i}' + m\dot{x_i}'\vec{e_i}' \cdot (\vec{w} \times \vec{r}) + \frac{m}{2}(\vec{w} \times \vec{r})^2 - U(\vec{r})$$

Unter Verwendung von $\vec{w} = w_i'\vec{e_i}'$ kann ebenso geschrieben werden

$$L = \frac{m}{2}\dot{x_i}'\dot{x_i}' + m\dot{x_i}\epsilon_{ijk}w_j'x_k' + \frac{m}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}w_j'x_k'w_l'x_m' - U(\vec{r})$$
$$= \frac{m}{2}\dot{x_i}'\dot{x_i}' + m\dot{x_i}\epsilon_{ijk}w_j'x_k' + \frac{m}{2}(w_i'w_i'x_j'x_j' - w_i'x_i'w_j'x_j') - U(\vec{r})$$

Damit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}'} = m\dot{x_i}' + m\epsilon_{ijk}w_j'x_k'$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}'} = m\ddot{x_i}' + m\epsilon_{ijk}w_j'\dot{x_k}'$$

Ausserdem

$$\frac{\partial L}{\partial x_i'} = m\epsilon_{ikj}w_j'\dot{x_k}' + m(x_i'w_j'w_j' - w_i'w_j'x_j') - \frac{\partial U}{\partial x_i'}$$

Schlussendliches Gleichsetzen liefert

$$m\ddot{x_i}' = F_i' - 2m\epsilon_{ijk}w_j'\dot{x_k}' - m(w_i'w_j'x_j' - x_i'w_j'w_j') = \vec{e_i}' \cdot (\vec{F} - 2m(\vec{w} \times \dot{x_j}'\vec{e_j}') - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}))$$

2 Kepler-Problem mit schwachem Magnetfeld ∗∗∗

Betrachten Sie das modifizierte Kepler Problem im gebundenen Zustand, konkret ein Coulomb Potential mit einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$, sodass die Lorentzkraft berücksichtigt werden muss.

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Unter der Voraussetzung, dass $B^2 \ll 4mk/q^2r^3$ berechnen Sie die Frequenz w mit der sich die elliptische Bahn des Teilchens um seine Ausgangsform dreht. Betrachten Sie dafuer das System in einem rotierenden Bezugssystem, wobei Sie die Rotationsfrequenz w geschickt waehlen muessen.
Loesung:

In einem rotierenden Bezugssystem sieht die Gleichung wie folgt aus

$$m(\ddot{\vec{r}} + 2\vec{w} \times \dot{\vec{r}} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})) = -k\frac{\vec{r}}{r^3} + q(\dot{\vec{r}} + \vec{w} \times \vec{r}) \times \vec{B}$$

Sortiert man

$$m\ddot{\vec{r}} + k\frac{\vec{r}}{r^3} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{w} - q\vec{B} \times (\vec{w} \times \vec{r}) - m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

Waehlt man nun

$$\vec{w} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$$

so sieht man, dass im rotierenden Bezugssystem gilt

$$m\ddot{\vec{r}} + k\frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\frac{q^2}{2m} - \frac{q^2}{4m}\right)\vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{q^2}{4m}\vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r})$$

Unter der gegebenen Voraussetzung, dass $\vec{B}$ klein gegenueber der Coulombkraft ist, ergibt sich dann im rotierenden Bezugssystem das klassische Keplerproblem, welches fuer gebundene Zustaende dann Ellipsenbahnen ergibt. Zuruecktransformiert, im Inertialsystem rotieren dann die Ellipsen sich mit der Frequenz $w = \frac{qB}{2m}$, auch Larmorfrequenz genannt.

3 Lagrange 1 in einer Dimension

Auf einem Tisch in der x-y-Ebene liegt ein Block mit Masse M und Höhe a, auf diesem liegt wiederum ein zweiter Block mit Masse m und Höhe b. Die Anordnung befindet sich im Schwerefeld der Erde, das in negative z-Richtung wirkt. Es finden keine Bewegungen in x- oder y-Richtung statt, sodass es sich um ein eindimensionales Problem handelt. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art (in z-Richtung) auf und bestimmen Sie alle Zwangskräfte.
Lösung:

Die Zwangsbedingungen lauten

$$g_1 = z_M = 0 \qquad \text{und} \tag{1}$$
$$g_2 = z_m - z_M - \text{const.} = 0. \tag{2}$$

Im Allgemeinen können hier also 4 Zwangskräfte vorhanden sein, da wir für jede Zwangsbedingung den Gradienten bezüglich jedem Objekt bilden müssen. Wir führen die zunächst unbekannten Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 ein und setzen an mit

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_M g_1 = \lambda_1\, \hat{e}_z, \tag{3}$$
$$\vec{Z}_2 = \lambda_2 \vec{\nabla}_M g_2 = -\lambda_2\, \hat{e}_z, \tag{4}$$
$$\vec{Z}_3 = \lambda_1 \vec{\nabla}_m g_1 = 0, \tag{5}$$
$$\vec{Z}_4 = \lambda_2 \vec{\nabla}_m g_2 = \lambda_2\, \hat{e}_z. \tag{6}$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art (in z-Richtung) lauten somit

$$M\ddot{z}_M = -Mg + Z_1 + Z_2 = -Mg + \lambda_1 - \lambda_2, \tag{7}$$
$$m\ddot{z}_m = -mg + Z_3 + Z_4 = -mg + \lambda_2, \tag{8}$$
$$g_1 = z_M = 0, \tag{9}$$
$$g_2 = z_m - z_M - \text{const.} = 0. \tag{10}$$

Wir bilden die doppelten Zeitableitungen der beiden Zwangsbedingungen und erhalten $\ddot{z}_M = \ddot{z}_m = 0$. Durch Einsetzen in die Lagrange-Gleichungen folgt

$$\lambda_2 = mg \tag{11}$$
$$\lambda_1 = Mg + \lambda_2 = (M+m)g. \tag{12}$$

Die drei nicht verschwindenden Zwangskräfte sind also

$$\vec{Z}_1 = (M+m)g\, \hat{e}_z, \tag{13}$$
$$\vec{Z}_2 = -mg\, \hat{e}_z, \tag{14}$$
$$\vec{Z}_4 = mg\, \hat{e}_z = -\vec{Z}_2. \tag{15}$$

Dies sind genau die drei Normalkräfte, die aufgrund der Kräftegleichgewichte zu erwarten waren. $\vec{Z}_1$ ist die Kraft, die der Tisch auf Masse M ausübt. $\vec{Z}_2$ ist die, die Masse m auf Masse M ausübt, und $\vec{Z}_4$ die zu $\vec{Z}_2$ gehörige Gegenkraft (gemäß Newton 3). $\vec{Z}_3$ verschwindet, da der Tisch die Masse m nicht berührt und somit auch keine direkte Kraft auf diese ausüben kann.

4 Pendel an Federaufhängung **

Betrachten Sie das an zwei Federn aufgehängte Pendel aus Abbildung 1, das sich im Schwerefeld der Erde befindet. Die Punktmasse m_1 und die beiden Federn bewegen sich nur horizontal. Es handelt sich um zwei identische, masselose Federn mit Federkonstante k, deren Ruhelänge jeweils genau der Hälfte des Abstandes der beiden Wände voneinander entspricht. Der Faden, an dem m_2 aufgehängt ist, habe die Länge l und sei ebenfalls masselos.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion mit geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(c) Betrachten Sie nun ausschließlich kleine Winkel ϕ. Zeigen Sie, dass dann beide Bewegungsgleichungen die Form einer erzwungenen Schwingung

$$c_1\ddot{q}_1 + c_2 q_1 = f(q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2)$$

annehmen. Dabei sind $c_{1,2}$ Konstanten und $q_{1,2}$ die beiden generalisierten Koordinaten.

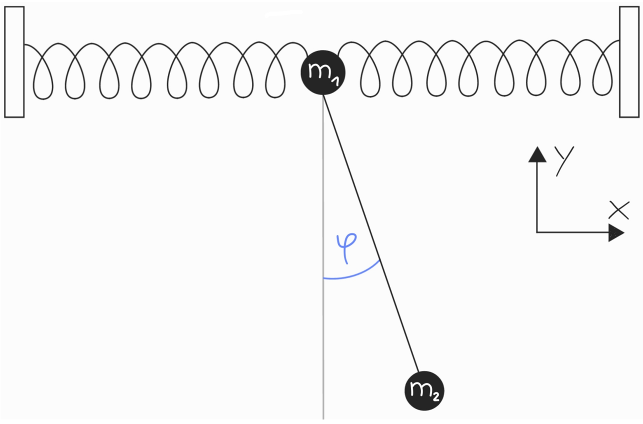

Abbildung 1: Pendel der Masse m_2, dessen Aufhängung der Masse m_1 an zwei identischen horizontalen Federn mit Federkonstante k befestigt ist.

Lösung:

(a) Wir wählen die generalisierten Koordinaten (x, ϕ) mit

$$x_1 = x \ , \ \ y_1 = 0 \ , \ \ x_2 = x + l\sin(\phi) \ , \ \ y_2 = -l\cos(\phi).$$

Mit $\vec{v}_1^2 = \dot{x}^2$, $\vec{v}_2^2 = (\dot{x} + l\cos(\phi)\dot{\phi})^2 + l^2\sin^2(\phi)\dot{\phi}^2 = \dot{x}^2 + 2l\cos(\phi)\dot{\phi}\dot{x} + l^2\dot{\phi}^2$ lautet die Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(2l\cos(\phi)\dot{\phi}\dot{x} + l^2\dot{\phi}^2) + m_2 g l\cos(\phi) - kx^2. \tag{16}$$

(b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\cos(\phi)\ddot{\phi} - m_2 l\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + 2kx = 0 \tag{17}$$

und

$$\cos(\phi)\ddot{x} + l\ddot{\phi} + g\sin(\phi) = 0 \tag{18}$$

(c) Mit Kleinwinkelnäherung lauten die Bewegungsgleichungen

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + 2kx = m_2 l(\phi\dot{\phi}^2 - \ddot{\phi}) =: f(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \tag{19}$$

und

$$l\ddot{\phi} + g\phi = -\ddot{x} =: \tilde{f}(x, \dot{x}, \ddot{x}), \tag{20}$$

und haben somit die angegebene Form.

5 Pendel mit periodisch bewegter Aufhängung **

Ein Pendel mit einer Punktmasse m, masselosem Faden der Länge l, und masseloser Aufhängung befindet sich im Schwerefeld der Erde. Alle Bewegungen finden ausschließlich im zweidimensionalen Raum statt. Stellen Sie jeweils die Lagrange-Funktion auf, wenn die Aufhängung mit konstanter Kreisfrequenz (bzw. Winkelgeschwindigkeit) ω

(a) in vertikaler Richtung (mit maximaler Auslenkung $\pm R$; bei $t = 0$ sei die Aufhängung in der Mitte)

(b) in horizontaler Richtung (mit maximaler Auslenkung $\pm R$; bei $t = 0$ sei die Aufhängung in der Mitte)

(c) im Kreis (mit Radius R und gegen den Uhrzeigersinn; bei $t = 0$ sei die Aufhängung am obersten Punkt)

oszilliert.
Lösung:

Als generalisierte Koordinate wählen wir in allen drei Fällen den Winkel ϕ zwischen der Vertikalen und dem Seil.

(a) Es gilt

$$x = l\sin(\phi) \ ; \quad y = R\sin(\omega t) - l\cos(\phi) \tag{21}$$

und somit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) + 2Rl\omega\dot{\phi}\cos(\omega t)\sin(\phi)) + mg(l\cos(\phi) - R\sin(\omega t)) \tag{22}$$

(b) Hier gilt

$$x = R\sin(\omega t) + l\sin(\phi) \ ; \quad y = l\cos(\phi), \tag{23}$$

also ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) + 2Rl\omega\dot{\phi}\cos(\omega t)\cos(\phi)) + mgl\cos(\phi). \tag{24}$$

(c) Jetzt ist

$$x = -R\sin(\omega t) + l\sin(\phi) \ ; \quad y = R\cos(\omega t) - l\cos(\phi) \tag{25}$$

und daher

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}[R^2\omega^2 + l^2\dot{\phi}^2 - 2Rl\omega\dot{\phi}(\cos(\omega t)\cos(\phi) + \sin(\omega t)\sin(\phi))] + mg(l\cos(\phi) - R\cos(\omega t)) = \\ &= \frac{m}{2}[R^2\omega^2 + l^2\dot{\phi}^2 - 2Rl\omega\dot{\phi}\cos(\omega t - \phi)] + mg(l\cos(\phi) - R\cos(\omega t)), \end{aligned} \tag{26}$$

wobei im letzten Schritt das Additionstheorem

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

verwendet wurde.

6 Zwei Massen, Block, Schnur ∗∗∗

Zwei Massen der Masse m seien über eine nicht dehnbare, masselose Schnur wie in Abbildung 2 zu sehen an den Block mit Masse M angebracht. Die zwei Massen können sich dabei jeweils nur auf den Seiten des Blockes bewegen, und können nicht „abheben“. Bestimmen Sie fuer dieses System die Beschleunigung des Blocks $\ddot{x}_0$, falls es sich zunächst in Ruhe befindet und die klassische homogene Gravitationskraft in vertikaler Richtung wirkt, mittels:

(a) Lagrange 1, durch Aufstellen der Zwangsbedingungen

(b) Lagrange 2

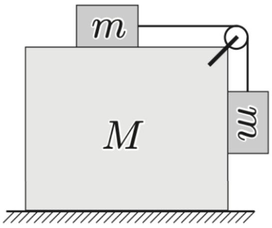

Abbildung 2: Zwei Massen an einem Block

Lösung

(a) Bezeichen die Koordinaten von den zwei Massen mit x_1, y_1 und x_2, y_2, sowie die des Blockes mit x_0, y_0. Die Zwangsbedingungen lauten dann

$$g_1(x_i, y_i) = (x_0 - x_2) - y_1 = const.$$

$$g_2(x_i, y_i) = x_0 - x_1 = const.$$

Die Bewegungsgleichungen sind somit

$$m\ddot{\vec{r_i}} = \vec{F} + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2$$

Explizit aufgeschrieben und sortiert ergibt das fuer die relevanten Koordinaten

$$m\ddot{x}_1 = -\lambda_2 \tag{27}$$
$$m\ddot{y}_1 = -mg - \lambda_1 \tag{28}$$
$$m\ddot{x}_2 = -\lambda_1 \tag{29}$$
$$M\ddot{x}_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{30}$$

Aufloesen dieser Gleichungen ergibt dann

$$\lambda_1 = -\frac{m}{2}(g + \ddot{x}_0) \tag{31}$$
$$\lambda_2 = -m\ddot{x}_0 \tag{32}$$

Also

$$M\ddot{x}_0 = -\frac{m}{2}(g + \ddot{x}_0) - m\ddot{x}_0 \quad \Rightarrow \ddot{x}_0 = -\frac{mg}{2M + 3m}$$

(b) Mit derselben Benennung der Koordinaten wie in der (a) ergeben sich aus Ueberlegungen

$$\dot{x_1} = \dot{x_0}$$

$$\dot{y_1} = \dot{x_0} - \dot{x_2} = \dot{x_1} - \dot{x_2}$$

Damit ergeben sich fuer die Energien

$$U = mgy_1$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x_1} - \dot{y_1})^2 + \frac{M}{2}\dot{x_1}^2)$$

Fuer die Lagrange Funktion dann

$$L = \frac{2m+M}{2}\dot{x_1}^2 - m\dot{x_1}\dot{y_1} + m\dot{y_1}^2 - mgy_1$$

Lagrangegleichungen 2.Art ergeben dann

$$(2m+M)\ddot{x}_1 - m\ddot{y}_1 = 0$$

$$-m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{y}_1 = -mg$$

Aufgeloest ergibt das dann wieder

$$\ddot{x_0} = -\frac{mg}{2M+3m}$$

7 Zentrifuge - Lagrange 1 in Zylinderkoordinaten ***

Sei $\rho^2 = x^2 + y^2$. Eine Punktmasse m, die sich im Schwerefeld der Erde befindet, wird auf eine rotationssymmetrische Röhre gezwungen, deren Radius mit der Höhe variiert. Diese Form der Röhre ist gegeben durch $\rho = f(z)$, mit einer unbekannten Funktion $f(z)$, für die $f(0) = 0$ gelte. Durch die Drehung der Röhre um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω soll das Teilchen auf konstanter Höhe $z =$ const. gehalten werden. (**Anmerkung:** Sie können auch Teilaufgabe (c) zuerst bearbeiten.)

(a) Wie muss $f(z)$ gewählt werden, damit die dafür benötigte Winkelgeschwindigkeit ω unabhängig von der Höhe z ist? Benutzen Sie die Lagrange-Gleichung 1. Art.

Hinweis: Verwenden Sie die Beschleunigung

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

und den Gradienten

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z$$

in Zylinderkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie nun die Zwangskraft mit den Ergebnissen aus (a) und interpretieren Sie die beiden Terme, aus denen Sie sich zusammensetzt.

(c) Leiten sie die Form von $f(z)$ wie in (a) nochmals her, allerdings jetzt mittels graphischer Überlegungen und ohne Verwendung des Lagrange-Formalismus.

Lösung:

(a) Die Zwangsbedinung lautet

$$g = \rho - f(z). \tag{33}$$

Damit können wir die Lagrange-Gleichung 1. Art

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \vec{Z} = -mg\hat{e}_z + \lambda\vec{\nabla}g \tag{34}$$

aufstellen. Mit den Formeln für Beschleunigung und Gradient in Zylinderkoordinaten lautet dies

$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z = -g\hat{e}_z + \frac{\lambda}{m}(\hat{e}_\rho - f'(z)\hat{e}_z). \tag{35}$$

Daraus erhalten wir

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = \frac{\lambda}{m}, \tag{36}$$

$$\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} = 0 \tag{37}$$

und

$$\ddot{z} = -g - \frac{\lambda}{m} f'(z), \tag{38}$$

indem wir die Skalarprodukte von Gleichung (35) mit den drei Basisvektoren $\hat{e}_{\rho,\phi,z}$ bilden. Jetzt setzen wir die geforderten Bedingungen $\dot{\phi} = \omega$ =const. und z =const. ein, sodass

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = \frac{\lambda}{m}, \tag{39}$$

$$2\dot{\rho}\omega = 0 \tag{40}$$

und

$$0 = -g - \frac{\lambda}{m} f'(z), \tag{41}$$

folgt. Aus Gleichung (40) folgt $\ddot{\rho} = 0$. Damit liefert Gleichung (39), dass

$$\frac{\lambda}{m} = -f(z)\omega^2, \tag{42}$$

wobei wir zusätzlich die Zwangsbedingung $\rho = f(z)$ verwendet haben. Durch Einsetzen in Gleichung (41) erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{g}{\omega^2} = f(z)f'(z) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f(z))^2. \tag{43}$$

Umstellung und Integration führt auf

$$f(z) = \pm\sqrt{\frac{2g}{\omega^2}z + c} \tag{44}$$

folgt. Wegen $f(z) = \rho \geq 0$ ist nur die positive Lösung sinnvoll und aus $f(0) = 0$ folgt $c = 0$. Damit erhalten wir letztendlich

$$\rho = f(z) = \sqrt{\frac{2g}{\omega^2}z}. \tag{45}$$

(b) Mit Gleichung (42) berechnet sich die Zwangskraft zu

$$\vec{Z} = \lambda\vec{\nabla}g = -m\omega^2 f(z)[\hat{e}_\rho - f'(z)\hat{e}_z] = -m\omega^2\sqrt{\frac{2g}{\omega^2}z}\,\hat{e}_\rho + mg\,\hat{e}_z = -m\omega^2\rho\,\hat{e}_\rho + mg\,\hat{e}_z. \tag{46}$$

Wir erkennen, dass genau in z-Richtung die Schwerkraft (2. Term) und in radialer Richtung die Zentrifugalkraft (1. Term) kompensiert wird.

(c) Man betrachte die geometrischen Überlegungen des Kräftegleichgewichts aus Abbildung 3. Wir erkennen, dass betraglich

$$Z_x = Z\cos(\alpha) = F_{ZF} = m\omega^2\rho, \tag{47}$$

$$Z_y = Z\sin(\alpha) = F_g = mg \tag{48}$$

gilt. Wir bilden den Quotienten und betrachten nochmals Abbildung 3, sodass wir

$$Z_y/Z_x = \frac{g}{\omega^2\rho} = \tan(\alpha) = \frac{d\rho}{dz} \tag{49}$$

erhalten. Mit $\rho = f(z)$ folgt

$$\frac{g}{\omega^2} = f(z)f'(z), \tag{50}$$

was der Differentialgleichung in Gleichung (43) aus (a) entspricht, die dort bereits gelöst wurde.

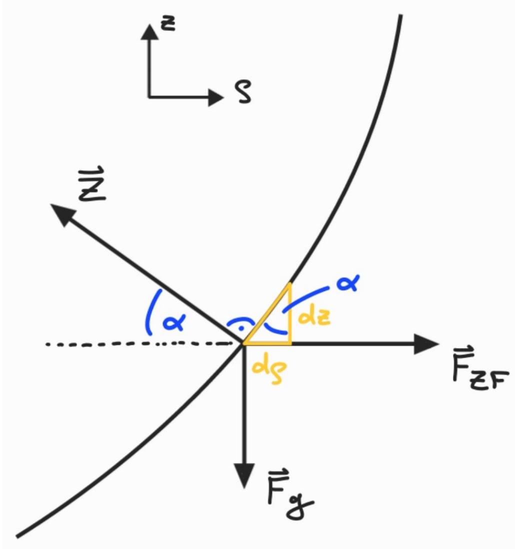

Abbildung 3: Skizze der wirkenden Kräfte für Aufgabe (c).

8 Herleitung Lagrange 2 ***

(a) Zeigen Sie, dass sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen direkt aus den Lagrangegleichungen 2.Art ergeben, falls das System keinen Zwangsbedingungen unterliegt. Sie koennen annehmen, dass es sich um ein 1-Teilchen System handelt und es keine dissipativen Kraefte gibt.

(b) Leiten Sie aus den newtonschen Bewegungsgleichungen in 3 Dimensionen fuer ein 1-Teilchen System die Lagrangegleichungen 2.Art her, falls ein konservatives Kraftfeld vorliegt und die Zwangsbedingungen skleronom sind.

Betrachten Sie dafuer kanonische Koordinaten q_i, fuer welche moegliche Zwangsbedingungen automatisch erfuellt sind und leiten Sie die kinetische und potentielle Energie T, U nach $q_i, \dot{q}_i$ jeweils ab. Beachten Sie, dass durch die Koordinatentransformation $x_j = x_j(q_i)$ gilt, wobei x_j die kartesischen Koordinaten im Ruhesystem sind. Da Zwangsbedingungen vorliegen koennen, gilt im Allgemeinen nach Lagrange 1 mit g_k den Zwangsbedingungen.

$$m\ddot{x}_j = F_j + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

Sie koennen ausserdem verwenden, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

Versuchen Sie dann schlussendlich die Motivation zu finden, die Groesse $L = T - U$ zu definieren.

Loesung

(a) Da es keine Zwangsbedingungen gibt, kann in kartesischen Koordinaten gerechnet werden. Dann ist (in einer Dimension)

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

Der Vergleich durch die Lagrange Gleichug 2.Art ergib dann

$$m\ddot{x} = F_x$$

(b) Seien nun kanonische Koordinaten q_i (wie viele Koordinaten q_i gebraucht werden, um das System zu beschreiben, haengt natuerlich davon ab, wie viele unabhaengige Zwangsbedingungen existieren)gegeben, sodass die Zwangsbedingungen automatisch erfuellt sind. Dabei ist zu beachten, dass diese Koordinatentransformation dann bedingt, dass $x_j = x_j(q_i)$. Ausserdem gilt offenbar, dass

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_j\dot{x}_j \qquad U = U(x_j) = U(q_i)$$

Ableiten ergibt dann

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = m\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \tag{51}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \qquad da \ \frac{\frac{\partial x_j}{\partial t}}{\frac{\partial q_i}{\partial t}} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{52}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \tag{53}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{54}$$

$$\tag{55}$$

Man sieht, dass die Gleichungen sich haeufig nur um eine abgeleitete Koordinate formweise unterscheiden. Um in den ersten beiden Gleichungen noch die Beschleunigung zu finden, welche bei den vorletzten Gleichung vorkommt, bietet es sich an, nochmal nach der Zeit abzuleiten. Daher bilden wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m\dot{x}_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

denn es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\partial q_k}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial x_j}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial q_i}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_j) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

Damit folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

Nun muss beachtet werden, dass nach Lagrange 1 mit den Zwangsbedingungen g_k gilt

$$m\ddot{x}_j = F_j + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

Da man den Term in der vorletzten Gleichung vereinfachen will, modifiziert man diesen

$$m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

Nun ist aber, da q_i eine generalisierte Koordinate ist, g konstant entlang jeglicher Kurven, die von q_i beschrieben werden. Daher

$$\frac{\partial g_k}{\partial q_i} = 0$$

Sodass

$$m\ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + 0 = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$$

Man sieht also nach dem ineinander einsetzen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} = 0$$

Hierin ist die Form der Lagrangefunktion $L = T - U$ begruendet. Falls gar keine Zwangsbedingungen vorliegen, koennen natuerlich beliebige Koordinaten verwendet werden.

9 Lagrange Funktion in der Elektrodynamik ****

Die allgemeine Kraft auf Ladungen in elektromagnetischen Feldern E, B ist gegeben als

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \dot{v} \times \vec{B})$$

Aus den Maxwell Gleichungen ergibt sich ausserdem, dass es Potentiale $\Phi, \vec{A}$ gibt mit

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Leiten Sie durch einsetzen der obigen Gleichungen ineinander die Lagrange Funktion her, welche ueber die Lagrange Gleichungen in obige Bewegunsgleichung fuehrt. Verifizieren Sie, dass fuer den Hamiltonian gilt

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$$

(Hinweis: Betrachten Sie die totale Zeitableitung von $\vec{A}$)
Loesung
Zunaechst einfaches Einsetzen in die Gleichung

$$\vec{F} = q(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}))$$

Nun ist

$$(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}))_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}v_j\partial_l A_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})v_j\partial_l A_m = v_j\partial_i A_j - v_j\partial_j A_i = (\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A})_i$$

Damit gilt

$$\vec{F} = q(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A})$$

Nun gilt ausserdem fuer die totale Zeitableitung von $\vec{A}$

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}$$

Demnach laesst sich umschreiben zu

$$\vec{F} = q(\nabla(-\Phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt}\vec{A})$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + q\vec{A}) = \vec{\nabla}(-q\Phi + q\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Wir wissen, dass die Lagrangegleichungen von folgender Form sein muessen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}L = \frac{\partial}{\partial x_i}L$$

Demnach ist

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}}L = m\vec{v} + q\vec{A} \quad \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\Phi$$

Es sei $\vec{q} = \vec{x}$, dann gilt fuer den konjugierten Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

Der Hamiltonian wird dadurch zu

$$H = q_i p_i - L = \vec{v}(m\vec{v} + q\vec{A}) - \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} - q\Phi = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\Phi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$$

10 Lagrange mit Reibung ****

Betrachten Sie zwei Teilchen gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$, die sich nur in der x-y-Ebene bewegen und durch einer masselosen Stange der Länge l miteinander verbunden sind. Außerdem wirke die Reibungskraft $\vec{F}_i = -\mu\dot{\vec{r}}_i$, wobei $i = 1, 2$ für Masse 1 bzw. 2 steht.

(a) Stellen Sie die Zwangsbedingung(en) auf. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten unter Verwendung der Koordinaten des Schwerpunkts. Berechnen Sie die Lagrange-Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Reibung.

(c) Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen an.

Lösung:

(a) Die einzige Zwangsbedingung lautet

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0. \tag{56}$$

Ohne Zwangsbedingung gäbe es für 2 Teilchen, die sich im zweidimensionalen Raum bewegen, 4 Freiheitsgrade. Da eine Zwangsbedingung vorliegt, hat das System also drei Freiheitsgrade und kann von drei generalisierten Koordinaten beschrieben werden.
(Anmerkung: Man könnte hier $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ als zusätzliche Zwangsbedingungen angeben, wenn man zunächst von einem dreidimensionalen Problem ausgeht. Zwei Teilchen im dreidimensionalen Raum ohne Zwangsbedingungen hätten 6 Freiheitsgrade, sodass wir dann für unser Problem wegen den drei Zwangsbedingungen wieder drei Freiheitsgrade erhalten.)

Als generalisierte Koordinaten wählen wir die Koordinaten (x, y) des Schwerpunkts sowie den Winkel ϕ zwischen der Horizontalen und dem Stab. Es gilt also

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos(\phi)\ ;\quad y_1 = y - \frac{l}{2}\sin(\phi)\ ;\quad x_2 = x + \frac{l}{2}\cos(\phi)\ ;\quad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin(\phi) \tag{57}$$

Wir wählen das konstante Potential so, dass es verschwindet. Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\phi}^2) \tag{58}$$

(b) Zur Berücksichtigung der Reibungskraft müssen wir die Zusatzterme

$$Q_{diss,k} = \sum_n F_{diss,n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} \tag{59}$$

berechnen. In unserem Fall ist $n = 4$ und $k = 3$. In der Formel wird die Benennung $(x_1, x_2, y_1, y_2) =: (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $(x, y, \phi) =: (q_1, q_2, q_3)$ verwendet. Wir erhalten

$$Q_x := Q_{diss,1} = -\mu(\dot{x}_1 \cdot 1 + \dot{x}_2 \cdot 1 + \dot{y}_1 \cdot 0 + \dot{y}_2 \cdot 0) = -2\mu\dot{x}, \tag{60}$$

$$Q_y := Q_{diss,2} = -\mu(\dot{x}_1 \cdot 0 + \dot{x}_2 \cdot 0 + \dot{y}_1 \cdot 1 + \dot{y}_2 \cdot 1) = -2\mu\dot{y} \tag{61}$$

und

$$\begin{aligned} Q_\phi := Q_{diss,3} &= -\mu(\dot{x}_1 \cdot \frac{l}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} - \dot{x}_2 \cdot \frac{l}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} - \dot{y}_1 \cdot \frac{l}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} + \dot{y}_2 \cdot \frac{l}{2}\cos(\phi))\dot{\phi} = \\ &= -\frac{\mu l}{2}(l\sin^2(\phi) + l\cos^2(\phi))\dot{\phi} = -\frac{\mu l^2}{2}\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{62}$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann durch die modifizierten Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q_{k,diss} \tag{63}$$

gegeben, in denen die soeben berechneten Größen als Zusatzterme auftreten. Die Bewegungsgleichungen lauten folglich

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}\ ,\quad m\ddot{y} = -\mu\dot{y}\quad \text{und}\quad m\ddot{\phi} = -\mu\dot{\phi}. \tag{64}$$

(c) Die Bewegungsgleichungen haben alle dieselbe Form

$$m\ddot{q}_k = -\mu\dot{q}_k, \tag{65}$$

wir brauchen also nur diese eine Differentialgleichung zu lösen. Integration liefert

$$m\dot{q}_k = -\mu q_k + \mu c_k. \tag{66}$$

Die homogene Differentialgleichung

$$m\dot{q}_k = -\mu q_k \tag{67}$$

wird gelöst durch

$$q_{k,hom} = A_k \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right). \tag{68}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$q_{k,part} = c_k, \tag{69}$$

sodass wir die allgemeine Lösung

$$q_k = q_{k,hom} + q_{k,part} = A_k \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right) + c_k \tag{70}$$

erhalten.