Übungsblatt 2

1 Rotierendes Bezugssystem ∗∗∗

Betrachten Sie die Transformation eines Intertialsystems in ein gleichfoermig rotierendes Bezugssystem, wobei die Standardbasisvektoren wie folgt transformiert werden

$$\vec{e_i}' = R\vec{e_i}$$

(a) Beweisen Sie zunaechst, dass fuer $\dot{R}R^T$ ein Vektor $\vec{w}$ exisitert, sodass fuer alle Vektoren $\vec{u}$ gilt

$$\dot{R}R^T\vec{u} = \vec{w} \times \vec{u}$$

Dass dieser Vektor $\vec{w}$ tatsaechlich derjenige Vektor ist, um den sich das Koordinatensystem dreht muessen sie nicht zeigen (Das geht zB, wenn man $R = \cos(wt)I_3 + \sin(wt)(\vec{u}\times\cdot) + (1-\cos(wt))\vec{u}\vec{u}^T$ ansetzt, mit $\vec{u}$ der normierten Drehachse und w der Winkelgeschwindigkeit), koennen Sie aber von nun an voraussetzen.

(b) Zeigen Sie damit, dass

$$\dot{\vec{e_i}'} = \vec{w} \times \vec{e_i}'$$

(c) Ein und derselbe Vektor kann nun bzgl zwei verschiedene Basen entwickelt werden

$$\vec{r} = x_i\vec{e_i} = x_i'\vec{e_i}'$$

Dabei sind x_i, x_i' jeweils die Koordinatenvektoren des Vektors $\vec{r}$ bzgl. der Orthogonalsysteme. Leiten Sie her, dass gilt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}_i'\vec{e_i}' + \vec{w} \times \vec{r}$$

(d) Benutzen Sie diese Tatsache, um die Bewegungsgleichungen im rotierenden Bezugssystem herzuleiten. Sie koennen dabei selber entscheiden, ob Sie von Newton oder Lagrange 2. Art Gebrauch nehmen.

2 Kepler-Problem mit schwachem Magnetfeld ∗∗∗

Betrachten Sie das modifizierte Kepler Problem im gebundenen Zustand, konkret ein Coulomb Potential mit einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$, sodass die Lorentzkraft berücksichtigt werden muss.

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

Unter der Voraussetzung, dass $B^2 \ll 4mk/q^2r^3$ berechnen Sie die Frequenz w mit der sich die elliptische Bahn des Teilchens um seine Ausgangsform dreht. Betrachten Sie dafuer das System in einem rotierenden Bezugssystem, wobei Sie die Rotationsfrequenz w geschickt waehlen muessen.

3 Lagrange 1 in einer Dimension

Auf einem Tisch in der x-y-Ebene liegt ein Block mit Masse M und Höhe a, auf diesem liegt wiederum ein zweiter Block mit Masse m und Höhe b. Die Anordnung befindet sich im Schwerefeld der Erde, das in negative z-Richtung wirkt. Es finden keine Bewegungen in x- oder y-Richtung statt, sodass es sich um ein eindimensionales Problem handelt. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art (in z-Richtung) auf und bestimmen Sie alle Zwangskräfte.

4 Pendel an Federaufhängung $**$

Betrachten Sie das an zwei Federn aufgehängte Pendel aus Abbildung 1, das sich im Schwerefeld der Erde befindet. Die Punktmasse m_1 und die beiden Federn bewegen sich nur horizontal. Es handelt sich um zwei identische, masselose Federn mit Federkonstante k, deren Ruhelänge jeweils genau der Hälfte des Abstandes der beiden Wände voneinander entspricht. Der Faden, an dem m_2 aufgehängt ist, habe die Länge l und sei ebenfalls masselos.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion mit geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(c) Betrachten Sie nun ausschließlich kleine Winkel ϕ. Zeigen Sie, dass dann beide Bewegungsgleichungen die Form einer erzwungenen Schwingung

$$c_1\ddot{q}_1 + c_2 q_1 = f(q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2)$$

annehmen. Dabei sind $c_{1,2}$ Konstanten und $q_{1,2}$ die beiden generalisierten Koordinaten.

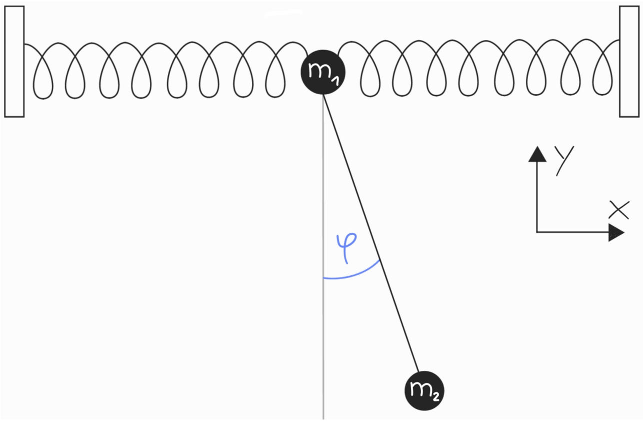

Abbildung 1: Pendel der Masse m_2, dessen Aufhängung der Masse m_1 an zwei identischen horizontalen Federn mit Federkonstante k befestigt ist.

5 Pendel mit periodisch bewegter Aufhängung $**$

Ein Pendel mit einer Punktmasse m, masselosem Faden der Länge l, und masseloser Aufhängung befindet sich im Schwerefeld der Erde. Alle Bewegungen finden ausschließlich im zweidimensionalen Raum statt. Stellen Sie jeweils die Lagrange-Funktion auf, wenn die Aufhängung mit konstanter Kreisfrequenz (bzw. Winkelgeschwindigkeit) ω

(a) in vertikaler Richtung (mit maximaler Auslenkung $\pm R$; bei $t = 0$ sei die Aufhängung in der Mitte)

(b) in horizontaler Richtung (mit maximaler Auslenkung $\pm R$; bei $t = 0$ sei die Aufhängung in der Mitte)

(c) im Kreis (mit Radius R und gegen den Uhrzeigersinn; bei $t = 0$ sei die Aufhängung am obersten Punkt)

oszilliert.

6 Zwei Massen, Block, Schnur $***$

Zwei Massen der Masse m seien über eine nicht dehnbare, masselose Schnur wie in Abbildung 2 zu sehen an den Block mit Masse M angebracht. Die zwei Massen können sich dabei jeweils nur auf den Seiten des Blockes bewegen, und können nicht „abheben“. Bestimmen Sie fuer dieses System die Beschleunigung des Blocks $\ddot{x}_0$, falls es sich zunächst in Ruhe befindet und die klassische homogene Gravitationskraft in vertikaler Richtung wirkt, mittels:

(a) Lagrange 1, durch Aufstellen der Zwangsbedingungen

(b) Lagrange 2

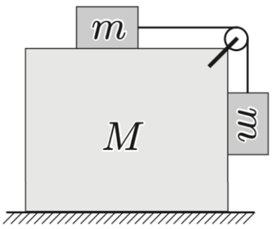

Abbildung 2: Zwei Massen an einem Block

7 Zentrifuge - Lagrange 1 in Zylinderkoordinaten ∗∗∗

Sei $\rho^2 = x^2 + y^2$. Eine Punktmasse m, die sich im Schwerefeld der Erde befindet, wird auf eine rotationssymmetrische Röhre gezwungen, deren Radius mit der Höhe variiert. Diese Form der Röhre ist gegeben durch $\rho = f(z)$, mit einer unbekannten Funktion $f(z)$, für die $f(0) = 0$ gelte. Durch die Drehung der Röhre um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω soll das Teilchen auf konstanter Höhe $z =$const. gehalten werden. (**Anmerkung:** Sie können auch Teilaufgabe (c) zuerst bearbeiten.)

(a) Wie muss $f(z)$ gewählt werden, damit die dafür benötigte Winkelgeschwindigkeit ω unabhängig von der Höhe z ist? Benutzen Sie die Lagrange-Gleichung 1. Art.

Hinweis: Verwenden Sie die Beschleunigung

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

und den Gradienten

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z$$

in Zylinderkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie nun die Zwangskraft mit den Ergebnissen aus (a) und interpretieren Sie die beiden Terme, aus denen Sie sich zusammensetzt.

(c) Leiten sie die Form von $f(z)$ wie in (a) nochmals her, allerdings jetzt mittels graphischer Überlegungen und ohne Verwendung des Lagrange-Formalismus.

8 Herleitung Lagrange 2 ∗∗∗

(a) Zeigen Sie, dass sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen direkt aus den Lagrangegleichungen 2.Art ergeben, falls das System keinen Zwangsbedingungen unterliegt. Sie koennen annehmen, dass es sich um ein 1-Teilchen System handelt und es keine dissipativen Kraefte gibt.

(b) Leiten Sie aus den newtonschen Bewegungsgleichungen in 3 Dimensionen fuer ein 1-Teilchen System die Lagrangegleichungen 2.Art her, falls ein konservatives Kraftfeld vorliegt und die Zwangsbedingungen skleronom sind.

Betrachten Sie dafuer kanonische Koordinaten q_i, fuer welche moegliche Zwangsbedingungen automatisch erfuellt sind und leiten Sie die kinetische und potentielle Energie T, U nach $q_i, \dot{q}_i$ jeweils ab. Beachten Sie, dass durch die Koordinatentransformation $x_j = x_j(q_i)$ gilt, wobei x_j die kartesischen Koordinaten im Ruhesystem sind. Da Zwangsbedingungen vorliegen koennen, gilt im Allgemeinen nach Lagrange 1 mit g_k den Zwangsbedingungen.

$$m\ddot{x}_j = F_j + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

Sie koennen ausserdem verwenden, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

Versuchen Sie dann schlussendlich die Motivation zu finden, die Groesse $L = T - U$ zu definieren.

9 Lagrange Funktion in der Elektrodynamik ****

Die allgemeine Kraft auf Ladungen in elektromagnetischen Feldern E, B ist gegeben als

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \dot{v} \times \vec{B})$$

Aus den Maxwell Gleichungen ergibt sich ausserdem, dass es Potentiale $\Phi, \vec{A}$ gibt mit

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Leiten Sie durch einsetzen der obigen Gleichungen ineinander die Lagrange Funktion her, welche ueber die Lagrange Gleichungen in obige Bewegunsgleichung fuehrt. Verifizieren Sie, dass fuer den Hamiltonian gilt

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$$

(Hinweis: Betrachten Sie die totale Zeitableitung von $\vec{A}$)

10 Lagrange mit Reibung ****

Betrachten Sie zwei Teilchen gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$, die sich nur in der x-y-Ebene bewegen und durch einer masselosen Stange der Länge l miteinander verbunden sind. Außerdem wirke die Reibungskraft $\vec{F}_i = -\mu\dot{\vec{r}}_i$, wobei $i = 1, 2$ für Masse 1 bzw. 2 steht.

(a) Stellen Sie die Zwangsbedingung(en) auf. Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten unter Verwendung der Koordinaten des Schwerpunkts. Berechnen Sie die Lagrange-Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Reibung.

(c) Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen an.