Übungsblatt 1 - Lösung

1 Vektoranalysis **

Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) $\triangle\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right) = 2r^{-4}$

(b) $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$

(c) $[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})]_i = A_j\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_i$ (Man beachte die Summenkonvention.)

(d) $\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{A}^2 - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

(e) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (c) für Teilaufgabe (d) und (e).
Lösung:

(a)

$$\triangle\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_j}{r^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\left(\frac{3}{r^2} - \frac{2x_jx_j}{r^4}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{2x_i}{r^4}\right) = -\frac{6}{r^4} + \frac{8}{r^4} = \frac{2}{r^4}. \tag{2}$$

(b)

$$\left[\vec{\nabla}\times(\frac{\vec{r}}{r})\right]_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_k}{r}\right) = \epsilon_{ijk}\left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_kx_j}{r^3}\right) \tag{3}$$

$$= \left[\frac{\vec{r}\times\vec{r}}{r^3}\right]_i = 0. \tag{4}$$

(c)

$$[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}A_j\frac{\partial}{\partial x_l}B_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_j\frac{\partial}{\partial x_l}B_m \tag{5}$$

$$= A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_j - A_j\frac{\partial}{\partial x_j}B_i = A_j\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_i. \tag{6}$$

(d) Setze $\vec{B} = \vec{A}$ in (c):

$$[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})]_i = A_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})A_i = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{A}^2) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})A_i \tag{7}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{A}^2 - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]_i. \tag{8}$$

(e) Mit (c) folgt, dass

$$[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})]_i = A_j\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_i + B_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})A_i, \tag{9}$$

und damit

$$[\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}]_i \tag{10}$$

$$= A_j\frac{\partial B_j}{\partial x_i} + B_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_jB_j) = [\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})]_i. \tag{11}$$

2 Kreuzprodukt und Rotationsmatrizen **

Zeigen Sie, dass für jegliche orthogonale Matrizen $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$R\vec{u} \times R\vec{v} = R(\vec{u} \times \vec{v})$$

.
Lösung
Komponentenweiser Vergleich gibt den Beweis.

$$(R\vec{u} \times R\vec{v})_i = \vec{e}_i \cdot (R\vec{u} \times R\vec{v}) = \det(\vec{e}_i, R\vec{u}, R\vec{v}) = \det(R)\det\left(R^T\vec{e}_i, \vec{u}, \vec{v}\right) = (R^T\vec{e}_i)^T(\vec{u} \times \vec{v}) = (R(\vec{u} \times \vec{v}))_i$$

3 Levi-Civita und Quantenmechanik ***

In der Quantenmechanik ist der Drehimpulsoperator als

$$\widehat{L} = \hat{x} \times \hat{p}$$

definiert, mit dem Impulsoperator

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

und dem Ortsoperator $\hat{x}$, der wie der Ortsvektor $\vec{x}$ behandelt werden kann. Verschwindet der Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

zweier Observablen A und B nicht, so hat dies eine Unschärfe zur Folge, d.h. die beiden assoziierten physikalischen Größen sind nicht gleichzeitig scharf messbar.
Leiten sie die Kommutatorrelation

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

der Drehimpulskomponenten her. In obiger Gleichung wird die Summenkonvention verwendet.
Lösung:
Mit $L_i = \epsilon_{imn}x_m p_n$ und $L_i = \epsilon_{jst}x_s p_t$ ist

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \epsilon_{imn}\epsilon_{jst}x_m p_n x_s p_t - \epsilon_{imn}\epsilon_{jst}x_s p_t x_m p_n && (12)\\
&= -i\hbar\epsilon_{imn}\epsilon_{jst}(x_m\delta_{ns}p_t - x_s\delta_{tm}p_n) && (13)\\
&= -i\hbar(\epsilon_{imn}\epsilon_{jnt}x_m p_t - \epsilon_{imn}\epsilon_{jsm}x_s p_n) && (14)\\
&= -i\hbar(\epsilon_{imn}\epsilon_{ntj}x_m p_t - \epsilon_{nim}\epsilon_{mjs}x_s p_n) && (15)\\
&= -i\hbar[(\delta_{it}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mt})x_m p_t - (\delta_{nj}\delta_{is} - \delta_{ns}\delta_{ij})x_s p_n] && (16)\\
&= -i\hbar(\delta_{it}\delta_{mj}x_m p_t - \delta_{ij}x_m p_m - \delta_{nj}\delta_{is}x_s p_n + \delta_{ij}x_n p_n). && (17)
\end{aligned}$$

Umbenennung $m \to n$ im zweiten Term und $n \to t,\ s \to m$ im letzten Term ergibt

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= -i\hbar(\delta_{it}\delta_{mj}x_m p_t - \delta_{tj}\delta_{im}x_m p_t) && (18)\\
&= -i\hbar(\delta_{jm}\delta_{it} - \delta_{jt}\delta_{im})x_m p_t && (19)\\
&= -i\hbar\epsilon_{jik}\epsilon_{kmt}x_m p_t && (20)\\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}(\epsilon_{kmt}x_m p_t) && (21)\\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k. && (22)
\end{aligned}$$

4 Kraft, Potential und Arbeit *

Betrachten sie die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \lambda \begin{pmatrix} axy \\ x^2 + bz^2 \\ yz \end{pmatrix},$$

mit der dimensionsbehafteten Konstanten $\lambda > 0$ und zwei reelwertigen Parametern a und b.

(a) Welche Dimension muss λ haben, damit es sich bei F tatsächlich um eine Kraft handelt?

(b) Bestimmen Sie a und b so, dass F ein Potential besitzt. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben mit diesen Werten.

(c) Geben Sie ein solches Potential U an.

(d) Die Punktmasse m soll vom Ursprung zum Ort (x_0, y_0, z_0) bewegt werden. Berechnen Sie die dafür benötigte Arbeit auf zwei verschiedene Arten. Für welche Werte x_0, y_0, z_0 wird Energie aufgenommen, für welche wird Energie abgegeben?

Lösung:

(a) Die Dimension einer Kraft ist $M\,L\,T^{-2}$, sodass λ die Dimension $M\,L^{-1}\,T^{2}$ haben muss.

(b) Die Forderung

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \lambda \begin{pmatrix} z - 2bz \\ 0 - 0 \\ 2x - ax \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \tag{23}$$

liefert $a = 2$ und $b = 1/2$. Für die folgenden Teilaufgaben ist also

$$\vec{F}(\vec{r}) = \lambda \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z^2/2 \\ yz \end{pmatrix}. \tag{24}$$

(c) Ein mögliches Potential ist $U = -\lambda(x^2 y + \frac{1}{2} y z^2)$, da $-\vec{\nabla} U = \vec{F}$ ergibt.

(d) **1. Variante:**

$$W = U(0,0,0) - U(x_0, y_0, z_0) = \lambda \left(x_0^2 y_0 + \frac{1}{2} y_0 z_0^2 \right) = \lambda y_0 \left(x_0^2 + \frac{1}{2} z_0^2 \right). \tag{25}$$

2. Variante: Wir wählen als Kurve die direkte Verbindung $\vec{\gamma}(t) = \vec{r}_0 t,\ t \in [0,1]$, vom Ursprung zu $\vec{r}_0$ und berechnen damit

$$W = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \, \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{3} \left(2x_0^2 y_0 + x_0^2 y_0 + \frac{1}{2} z_0^2 y_0 + y_0 z_0^2 \right) = \lambda y_0 \left(x_0^2 + \frac{1}{2} z_0^2 \right). \tag{26}$$

Für $y_0 > 0$ ist $W > 0$ und das Teilchen nimmt Energie auf (es wird Arbeit am Teilchen verrichtet), für $y_0 < 0$ gibt das Teilchen Energie ab (zumindest nach unserer Vorzeichen-Konvention). Streng genommen bleibt die Gesamtenergie des Teilchens immer gleich, gemeint ist hier eine Umwandlung von potentieller in kinetische Energie bzw. andersrum.

5 Potentialstufe *

Betrachten Sie das Potential

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1 & \text{für } x < 0 \\ U_2 & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{27}$$

im zweidimensionalen Raum. Ein Teilchen der Masse m überquert die Potentialstufe gemäß Abbildung 1. Im Bereich $x < 0$ hat das Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$, die sich dann beim Übergang in den Bereich $x > 0$ in Betrag und Richtung ändert. Stellen Sie eine Formel analog zum Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\phi_1 = n_2 \sin\phi_2 \tag{28}$$

der geometrischen Optik auf, das die Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 beschreibt. Welcher der beiden Winkel ist größer falls (1) $U_1 < U_2$ bzw. (2) $U_1 > U_2$? Berechnen Sie U_2 in Abhängigkeit von U_1, ϕ_1, ϕ_2 und $\vec{v_1}$.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass eine Impulskomponente erhalten ist. Betrachten Sie außerdem die Energieerhaltung.

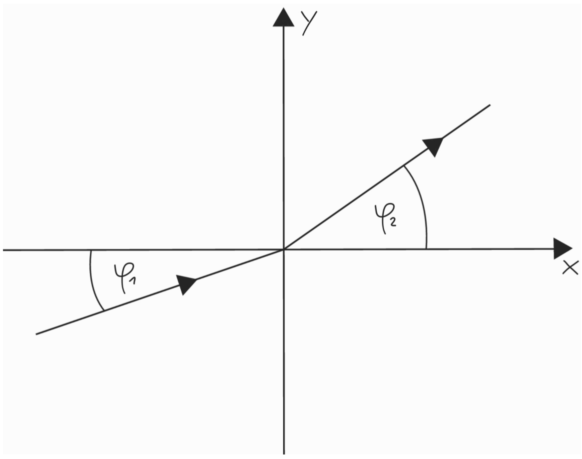

Abbildung 1: Bahn eines Teilchens beim Überqueren einer Potentialstufe bei $x = 0$

Lösung:

Sei v_{iy}, $i = 1, 2$, die Geschwindigkeit des Teilchens in y-Richtung in Gebiet 1 bzw. 2. Da $U = U(x)$ nur von x abhängt, gilt $F_y = \dot{p}_y = 0$ und damit Impulserhaltung in y-Richtung. Daraus folgt

$$v_{1y} = v_{2y} =: v_y. \tag{29}$$

Zusammen mit geometrischer Betrachtung liefert dies

$$\sin(\phi_i) = \frac{v_{yi}}{|\vec{v}_i|} = \frac{v_y}{|\vec{v}_i|} \ ; \ \ i = 1, 2. \tag{30}$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen (mit $i = 1$ und $i = 2$) erhält man

$$|\vec{v}_1| \sin(\phi_1) = |\vec{v}_2| \sin(\phi_2), \tag{31}$$

in Analogie zum Snelliusschen Brechungsgesetz aus Gleichung (28).

Für $U_1 < U_2$ ist $|\vec{v}_1| > |\vec{v}_2|$, d.h. $\sin(\phi_1) < \sin(\phi_2)$ und somit $\phi_1 < \phi_2$. Umgekehrt gilt $\phi_1 > \phi_2$, falls $U_1 > U_2$.

Mit der Energieerhaltung

$$\frac{m}{2}|\vec{v}_1|^2 + U_1 = \frac{m}{2}|\vec{v}_2|^2 + U_2 \tag{32}$$

und Gleichung (31) lässt sich U_2 ausdrücken als

$$U_2 = \frac{m}{2}(|\vec{v}_1|^2 - |\vec{v}_2|^2) + U_1 = \frac{m}{2}|\vec{v}_1|^2\left(1 - \frac{\sin^2(\phi_1)}{\sin^2(\phi_2)}\right) + U_1. \tag{33}$$

6 Epizykloide im elektromagnetischen Feld ***

Betrachte ein Teilchen mit Ladung q und Masse m welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ und Elektrischen Feld $\vec{E} = E_0\vec{r}$ befindet und sich nur in der xy-Ebene bewegt. Die auf das Teilchen wirkende Kraft ist dabei wie ueblich

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und formulieren sie diese um in eine Differentialgleichung in $\xi := x + iy$

(b) Folgern Sie, dass nur fuer $E_0 < \frac{qB_0^2}{4m}$ gebundene Bewegungen moeglich sind, und loesen Sie die Bewegungsgleichungen, falls sich das Teilchen bei $t = 0$ in Ruhe befindet und im Abstand a vom Ursprung entfernt ist. Die dabei entstehenden Bahnen werden auch Epizykloide genannt.

Loesung

(a) Es ergibt sich in 2 Dimensionen

$$\frac{m}{q}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = E_0\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + B_0\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\end{pmatrix}$$

Addiert man nun komponentenweise die Gleichungen auf nachdem man die y-Komponente mit i multiploiziert hat, ergibt sich

$$\frac{m}{q}(\ddot{x} + i\ddot{y}) - E_0(x + iy) + iB_0(\dot{x} + i\dot{y}) = 0$$

also

$$\frac{m}{q}\ddot{\xi} + iB_0\dot{\xi} - E_0\xi = 0$$

Diese lineare Differentialgleichung laesst sich loesen mit dem Ansatz

$$\xi = e^{\Omega t} \quad \Rightarrow \frac{m}{q}\Omega^2 + iB_0\Omega - E_0 = 0 \Rightarrow \Omega_\pm = \frac{-iB_0 \pm \sqrt{-B_0^2 + \frac{4E_0 m}{q}}}{2m/q} =: i\omega_\pm$$

(b) Damit ξ gebunden ist, muss der Exponent rein imaginaer sein, das heisst, die Diskriminante muss negativ sein

$$E_0 < \frac{B_0^2 q}{4m}$$

Damit laesst sich schreiben

$$i\omega_\pm = i\left(\frac{-B_0 \pm \sqrt{\frac{4E_0 m}{q} - B_0^2}}{2m/q}\right) \qquad \omega_\pm \in \mathbb{R}$$

$$\xi = Ae^{iw_+ t} + Be^{iw_- t}$$

mit den Anfangsbedingungen ergibt sich dann

$$\dot{\xi}(0) = 0 = i(Aw_+ + Bw_-) \qquad \Rightarrow B = -A\frac{w_+}{w_-}$$

$$\xi = A(e^{iw_+ t} - \frac{w_+}{w_-}e^{iw_- t})$$

O.B.d.A ist dann bei $t = 0$ $x = a$ und $y = 0$. Damit

$$\xi(0) = A(1 - \frac{w_+}{w_-}) = a$$

Insgesamt ergibt sich dann fuer x, y

$$x(t) = \frac{a}{1 - \frac{w_+}{w_-}}(\cos(w_+ t) - \frac{w_+}{w_-}\cos(w_- t))$$

$$y(t) = \frac{a}{1 - \frac{w_+}{w_-}}(\sin(w_+ t) - \frac{w_+}{w_-}\sin(w_- t))$$

Dies sind gerade Kurven von Epizykloiden `https://en.wikipedia.org/wiki/Epicycloid`

7 Phasenporträt ***

Wir betrachten eine eindimensionale, periodische Bewegung, die vollständig im Endlichen stattfindet. Längs des Phasenporträts (also der geschlossenen Kurve im Raum, der vom Ort x und dem Impuls p aufgespannt wird) ist die Energie $E(x,p)$ erhalten (Integral der Bewegung).

(a) Begründen Sie, warum das Porträt symmetrisch unter Spiegelung an der x-Achse ist.

(b) Eine periodische Bahn mit Energie E umschließt die Fläche

$$F(E) = \oint p\,dx = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} p\ \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Zeigen Sie, dass die Periodendauer T gegeben ist durch

$$T = \frac{\mathrm{d}F(E)}{\mathrm{d}E}. \tag{35}$$

(c) Berechnen Sie $F(E)$ für einen harmonischen Oszillator mit $E(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Prüfen Sie mit Hilfe von (b), ob Ihr Ergebnis auf die korrekte Periodendauer führt.

Lösung:

(a) Liegt der Punkt (x,p) auf der Kurve zu einer gegebenen Energie E, so tut dies auch der Punkt $(x,-p)$, da $E(x,p) = E(x,-p)$ ist. Daraus folgt direkt die angegebene Symmetrie.

(b) Aus

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x) \tag{36}$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}. \tag{37}$$

Dies liefert bekanntermaßen

$$t - t_0 = pm\int_x^{x_0}\sqrt{\frac{m}{2(E-U)}}\,\mathrm{d}x' \tag{38}$$

und damit insbesondere für die Periodendauer

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{E-U}}\,\mathrm{d}x. \tag{39}$$

Andererseits ergibt Gleichung (36) auch

$$p = \pm\sqrt{2m(E-U)}, \tag{40}$$

was zusammen mit Gleichung (34) auf

$$F(E) = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{2m(E-U)}\,\mathrm{d}x \tag{41}$$

führt. Wir wählen das positive Vorzeichen, da es sich um die Berechnung einer Fläche handelt. Differentiation von $F(E)$ nach E und anschließender Vergleich mit Gleichung (39) ergibt schließlich das gewünschte Ergebnis

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{m}{\sqrt{2m(E-U)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2m}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\sqrt{E-U}}\,\mathrm{d}x = T. \tag{42}$$

(c) Sei nun

$$E(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{43}$$

Durch Betrachtung bei $p = 0$ erhält man die Umkehrpunkte

$$x_{min,max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \tag{44}$$

Jetzt setzen wir das Oszillatorpotential in Gleichung (41) ein und berechnen

$$F(E) = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2mE}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E}x^2}\,\mathrm{d}x \tag{45}$$

$$= \frac{2}{\omega}\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi = 4E\frac{1}{\omega}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}E, \tag{46}$$

wobei wir $\sin(\phi) = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x$, mit Hilfe von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}(\sin(\phi))\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \cos(\phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x) = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega$, substituiert haben. Offenbar führt dies mit

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} = \frac{2\pi}{\omega} = T \tag{47}$$

auf die korrekte Periodendauer des harmonischen Oszillators.

8 Energieerhaltung im Zweiteilchensystem ∗

Betrachten Sie ein Zweiteilchensystem aus zwei Punktmassen m_1 und m_2, wobei $\dot{\vec{r}}_2 = 0$ gelten soll, d.h. m_2 befindet sich stets in Ruhe. Das Wechselwirkungspotential $U = U(\vec{r}_1)$ hängt dann nicht mehr vom Abstand der beiden Teilchen, sondern nur noch von der Position $\vec{r}_1$ ab. Zeigen Sie explizit, dass auch in diesem Spezialfall die Energie des Zweiteilchensystems erhalten ist.
Lösung:

Mit $U = U(\vec{r}_1)$ und der Benennung $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ ist

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\dot{x}_i. \tag{48}$$

Zusammen mit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}_i^2 = m\sum_i \dot{x}_i\ddot{x}_i \tag{49}$$

erhält man direkt

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + m\ddot{x}_i\right) = 0, \tag{50}$$

wobei im letzten Schritt die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{51}$$

verwendet wurden.

9 Galilei-Transformation und ihre Inverse $**$

Unter einer Galilei-Transformation $(R, \vec{v}, \vec{c}, t_0)$ mit konstanten Vektoren $\vec{v}$, $\vec{c}$ und einer orthogonalen Drehmatrix R versteht man die Koordinatentransformation

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r} - \vec{v}t - \vec{c}, \tag{52}$$

zusammen mit einer Zeittranslation

$$t \to t' = t - t_0. \tag{53}$$

(a) Berechnen Sie nun die Galilei-Transformation $(R, \vec{v}, \vec{c}, t_0)$, die sich durch Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen $(\hat{R}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{c}}, \hat{t}_0)$ und $(\overline{R}, \overline{\vec{v}}, \overline{\vec{c}}, \overline{t}_0)$ ergibt.

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus (a), um die Inverse einer allgemeinen Galilei-Transformation zu bestimmen.

Lösung:

(a) Wir wenden zuerst die Galilei-Trafo $(\hat{R}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{c}}, \hat{t}_0)$ an und erhalten

$$\vec{r}' = \hat{R}\vec{r} - \hat{\vec{v}}t - \hat{\vec{c}} \quad ; \quad t' = t - \hat{t}_0. \tag{54}$$

Jetzt transformieren wir $(\vec{r}', t')$ mit $(\overline{R}, \overline{\vec{v}}, \overline{\vec{c}}, \overline{t}_0)$ zu

$$\vec{r}'' = \overline{R}\vec{r}' - \overline{\vec{v}}t - \overline{\vec{c}} = \overline{R}\hat{R}\vec{r} - \overline{R}\hat{\vec{v}}t - \overline{R}\hat{\vec{c}} - \overline{\vec{v}}t - \overline{\vec{c}} = \overline{R}\hat{R}\vec{r} - (\overline{R}\hat{\vec{v}} + \overline{\vec{v}})t - (\overline{R}\hat{\vec{c}} + \overline{\vec{c}}); \tag{55}$$

$$t'' = t' - \overline{t}_0 = t - (\hat{t}_0 + \overline{t}_0). \tag{56}$$

Die Hintereinanderausführung der beiden Transformationen entspricht also der Galilei-Transformation

$$(\overline{R}\hat{R}, \overline{R}\hat{\vec{v}} + \overline{\vec{v}}, \overline{R}\hat{\vec{c}} + \overline{\vec{c}}, \hat{t}_0 + \overline{t}_0). \tag{57}$$

(b) Die Galilei-Transformation $(\overline{R}, \overline{\vec{v}}, \overline{\vec{c}}, \overline{t}_0)$ ist dann die Inverse von $(\hat{R}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{c}}, \hat{t}_0)$, wenn sie hintereinander ausgeführt die Identität $(\mathbb{1}, 0, 0, 0)$ ergeben, sodass $\vec{r}'' = \vec{r}$ und $t'' = t$ gilt. An den Ergebnissen aus (a) kann man ablesen, dass dies genau der Fall ist für

$$\overline{R} = \hat{R}^{-1} \ ; \ \ \overline{\vec{v}} = -\overline{R}\hat{\vec{v}} = -\hat{R}^{-1}\hat{\vec{v}} \ ; \ \ \overline{\vec{c}} = -\overline{R}\hat{\vec{c}} = -\hat{R}^{-1}\hat{\vec{c}} \ ; \ \ \overline{t}_0 = -\hat{t}_0. \tag{58}$$

Die Inverse von $(\hat{R}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{c}}, \hat{t}_0)$ ist also gegeben durch

$$(\hat{R}^{-1}, -\hat{R}^{-1}\hat{\vec{v}}, -\hat{R}^{-1}\hat{\vec{c}}, -\hat{t}_0) \tag{59}$$

10 Potential für geschlossene Bahnkurven und Orbits $*****$

Betrachten Sie ein allgemeines radiales Potential $V(r)$, und sein effektives Potential $U(r)$. Die Bewegung einer Probemasse findet allein in der Ebene statt, lässt sich also parametrisieren durch die Polarkoordinaten r, θ in der Ebene. Bezeichne weiterhin r_1, r_2 die Umkehrpunkte und r_0 den Abstand, bei dem $U = U_0$ sein Minimum einnimmt.

(a) Zeigen sie zunächst die formale Loesung für $\theta(r)$:

$$\theta(r) = \theta(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E-U)}}$$

(b) Wechseln Sie im Integral die Integrationsvariable zu U und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung nach E, nachdem Sie diese mit dem Faktor $1/\sqrt{U-E}$ versehen haben. Benutzen Sie schließlich

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

um auf das Ergebnis

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi L}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{U_0}^{U} \frac{\Delta\theta}{\sqrt{U-E}} dE$$

zu kommen, wobei $\Delta\theta(E)$ die Änderung in θ ist bei der vollständigen Bewegung von $r_1 \to r_2 \to r_1$

(c) Zeigen Sie, dass für geschlossene Bahnkurven gilt ($\alpha \in \mathbb{Q}$):

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha L}\sqrt{U-U_0}$$

(d) Durch Entwicklung der obigen Gleichung um r_0 bis zur 4. Ordnung können folgende Gleichungen hergeleitet werden:

$$U^{(2)} = \frac{\alpha^2 L^2}{mr_0^4},$$
$$U^{(4)} = \frac{3\alpha^2 L^2}{mr_0^4}\left(5c^2 + 8\frac{c}{r_0} + \frac{8}{r_0^2}\right)$$

mit

$$U^{(n)} := \frac{d^n U}{dr^n}\Big|_{r=r_0} \qquad c := \frac{U^{(3)}}{3U^{(2)}}$$

Benutzen Sie diese Information, um schlussendlich zu zeigen, dass die einzigen radialen Potentiale, die für ein Intervall von Anfangsbedingungen (E, L) geschlossene Orbits erlauben, die Coulomb- und Harmonische Oszillator-Potentiale sind ($V = -k/r$ und $V = \frac{1}{2}kr^2$).

Loesung

(a) In einem Zentralpotential ist der Drehimpuls erhalten $|\vec{L}| = L = mr^2\dot{\theta}$. Eingesetzt in die Energiegleichung

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-U)} \quad \Rightarrow \quad \theta(r) = \theta(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E-U)}}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\Delta\theta = 2(\theta_2 - \theta_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{2L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E-U)}} \\
&= L\sqrt{\frac{2}{m}} \left[\int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U}} + \int_{r_0}^{r_2} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U}} \right] \\
&= L\sqrt{\frac{2}{m}} \left[\int_{E}^{U_0} \frac{dr}{dU} \frac{dU}{r_1^2\sqrt{E-U}} + \int_{U_0}^{E} \frac{dr}{dU} \frac{dU}{r_2^2\sqrt{E-U}} \right] \\
&= L\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{U_0}^{E} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \frac{dr}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \\
&= L\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{U_0}^{E} \frac{dG}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}}
\end{aligned}$$

Nun wird mit dem Faktor multipliziert und integriert

$$\begin{aligned}
\int_{U_0}^{U} \frac{\Delta\theta}{\sqrt{U-E}} dE &= L\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{U_0}^{E} \frac{dG}{dU'} \frac{dU'}{\sqrt{E-U'}} \int_{U_0}^{U} \frac{dE}{\sqrt{U-E}} \\
&= L\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{U_0}^{U} \frac{dG}{dU'} dU' \int_{U'}^{U} \frac{dE}{\sqrt{(E-U')(U-E)}} \\
&= \pi L\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{U_0}^{U} dU' \frac{dG}{dU'} \\
&= \pi L\sqrt{\frac{2}{m}} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \right) \right]
\end{aligned}$$

Umstellen liefert dann

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi L}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{U_0}^{U} \frac{\Delta\theta}{\sqrt{U-E}} dE$$

(c) Geschlossene Orbits bedeuten, dass

$$\exists n \in \mathbb{N}: \; n\Delta\theta = 0 \bmod(2\pi) \qquad \Rightarrow n\Delta\theta = m2\pi$$

$$\Delta\theta = \frac{m}{n} 2\pi = \frac{2\pi}{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{Q}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi L}\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2\pi}{\alpha} (-2) \left(\sqrt{U-U} - \sqrt{U-U_0} \right) = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha L} \sqrt{U-U_0}$$

(d) Aus

$$U = \frac{L^2}{2mr^2} + V$$

ergibt sich

$$U^{(2)} = \frac{3L^2}{mr_0^4} + V^{(2)} = \frac{\alpha^2 L^2}{mr_0^4} \quad \Rightarrow V^{(2)} = (\alpha^2 - 3)\frac{L^2}{mr_0^4}$$

Ausserdem gilt, dass U bei r_0 ein Minimum hat, daher

$$U^{(1)} = 0 = -\frac{L^2}{mr_0^3} + V^{(1)} \quad \Rightarrow V^{(1)} = \frac{L^2}{mr_0^3}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} = \frac{d}{dr_0} \ln\left(V^{(1)}\right) = \frac{(\alpha^2 - 3)}{r_0}$$

Da fuer ein Intervall von Anfangswerten von E, L mithin implizit auch r_0 die Bedingung gelten soll, dass geschlossene Orbits entstehen, muss obige Gleichung fuer ein Intervall um r_0 gelten, wird also zu einer Differentialgleichung in r_0, welche geloest wird durch folgende Form des Potentials, bzw. dessen Ableitung:

$$V' = Cr^{\alpha^2 - 3}$$

Es muss also nur noch der Wert von α^2 bestimmt werden. Aus der Bedingung, dass $U^{(1)} = 0$ ergibt sich direkt

$$C = \frac{L^2}{mr_0^{\alpha^2}}$$

Und weiterhin durch ableiten :

$$U^{(3)} = -\frac{12L^2}{mr_0^5} + (\alpha^2-3)(\alpha^2-4)Cr_0^{\alpha^2-6} = \frac{L^2}{mr_0^5}(\alpha^4 - 7\alpha^2)$$

Damit ergibt sich

$$c = \frac{U^{(3)}}{3U^{(2)}} = \frac{\alpha^2-7}{3r_0}$$

Daher gilt ebenso

$$U^{(4)} = \frac{60L^2}{mr_0^6} + (\alpha^2-3)(\alpha^2-4)(\alpha^2-5)Cr_0^{\alpha^2-6} = \frac{L^2}{mr_0^6}(\alpha^6 - 12\alpha^4 + 47\alpha^2) = \frac{3\alpha^2L^2}{mr_0^6}\left(\frac{5}{9}(\alpha^2-7)^2 + \frac{8}{3}(\alpha^2-7) + 8\right)$$

Vereinfachen ergibt

$$\alpha^4 - 12\alpha^2 + 47 = \frac{5}{3}(\alpha^4 - 14\alpha^2 + 49) + 8(\alpha^2-7) + 24$$

$$\Rightarrow 2\alpha^4 - 10\alpha^2 + 8 = 2(\alpha^2-4)(\alpha^2-1)0 \Rightarrow \alpha^2 = 1,4$$

Daraus folgt die Behauptung, dass die zugrunde liegende Kraft von der Form

$$\vec{F} \cdot \vec{e_r} = -V' = -C\begin{cases} r & \alpha^2 = 4 \\ \frac{1}{r^2} & \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

ist, und somit entweder der Harmonische Oszillator oder das Coulomb Problem zugrunde liegt.