Technische Universität München
Physik
Felix Forner, Felix Schwarzfischer

Übungsblatt 1

1 Vektoranalysis $**$

Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) $\triangle\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\right)= 2r^{-4}$

(b) $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)= 0$

(c) $[\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})]_i = A_j\frac{\partial B_j}{\partial x_i} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})B_i$ (Man beachte die Summenkonvention.)

(d) $\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{A}^2 - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

(e) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus (c) für Teilaufgabe (d) und (e).

2 Kreuzprodukt und Rotationsmatrizen $**$

Zeigen Sie, dass für jegliche orthogonale Matrizen $R\in\mathbb{R}^{3\times3}$ und beliebige Vektoren $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ gilt

$$R\vec{u}\times R\vec{v} = R(\vec{u}\times\vec{v})$$

.

3 Levi-Civita und Quantenmechanik $***$

In der Quantenmechanik ist der Drehimpulsoperator als

$$\widehat{L} = \hat{x}\times\hat{p}$$

definiert, mit dem Impulsoperator

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

und dem Ortsoperator $\hat{x}$, der wie der Ortsvektor $\vec{x}$ behandelt werden kann. Verschwindet der Kommutator

$$[A,B] = AB - BA$$

zweier Observablen A und B nicht, so hat dies eine Unschärfe zur Folge, d.h. die beiden assoziierten physikalischen Größen sind nicht gleichzeitig scharf messbar.
Leiten sie die Kommutatorrelation

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

der Drehimpulskomponenten her. In obiger Gleichung wird die Summenkonvention verwendet.

4 Kraft, Potential und Arbeit *

Betrachten sie die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = \lambda \begin{pmatrix} axy \\ x^2 + bz^2 \\ yz \end{pmatrix},$$

mit der dimensionsbehafteten Konstanten $\lambda > 0$ und zwei reelwertigen Parametern a und b.

(a) Welche Dimension muss λ haben, damit es sich bei F tatsächlich um eine Kraft handelt?

(b) Bestimmen Sie a und b so, dass F ein Potential besitzt. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben mit diesen Werten.

(c) Geben Sie ein solches Potential U an.

(d) Die Punktmasse m soll vom Ursprung zum Ort (x_0, y_0, z_0) bewegt werden. Berechnen Sie die dafür benötigte Arbeit auf zwei verschiedene Arten. Für welche Werte x_0, y_0, z_0 wird Energie aufgenommen, für welche wird Energie abgegeben?

5 Potentialstufe *

Betrachten Sie das Potential

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1 & \text{für } x < 0 \\ U_2 & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

im zweidimensionalen Raum. Ein Teilchen der Masse m überquert die Potentialstufe gemäß Abbildung 1. Im Bereich $x < 0$ hat das Teilchen die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$, die sich dann beim Übergang in den Bereich $x > 0$ in Betrag und Richtung ändert. Stellen Sie eine Formel analog zum Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \tag{2}$$

der geometrischen Optik auf, das die Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zweier Medien mit Brechungsindizes n_1 und n_2 beschreibt. Welcher der beiden Winkel ist größer falls (1) $U_1 < U_2$ bzw. (2) $U_1 > U_2$? Berechnen Sie U_2 in Abhängigkeit von U_1, ϕ_1, ϕ_2 und $\vec{v_1}$.
Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass eine Impulskomponente erhalten ist. Betrachten Sie außerdem die Energieerhaltung.

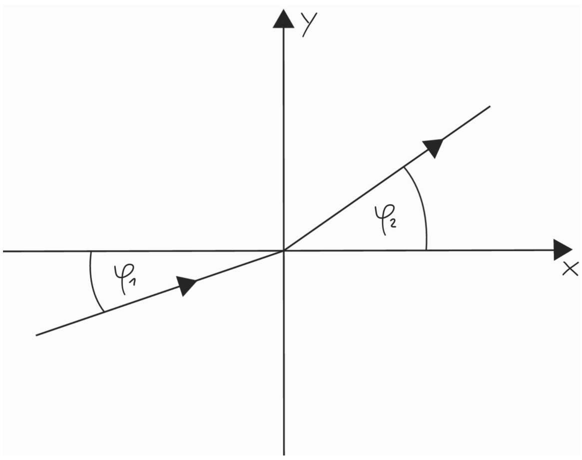

Abbildung 1: Bahn eines Teilchens beim Überqueren einer Potentialstufe bei $x = 0$

6 Epizykloide im elektromagnetischen Feld $***$

Betrachte ein Teilchen mit Ladung q und Masse m welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e_z}$ und Elektrischen Feld $\vec{E} = E_0\vec{r}$ befindet und sich nur in der xy-Ebene bewegt. Die auf das Teilchen wirkende Kraft ist dabei wie ueblich

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und formulieren sie diese um in eine Differentialgleichung in $\xi := x + iy$

(b) Folgern Sie, dass nur fuer $E_0 < \frac{qB_0^2}{4m}$ gebundene Bewegungen moeglich sind, und loesen Sie die Bewegungsgleichungen, falls sich das Teilchen bei $t = 0$ in Ruhe befindet und im Abstand a vom Ursprung entfernt ist. Die dabei entstehenden Bahnen werden auch Epizykloide genannt.

7 Phasenporträt $***$

Wir betrachten eine eindimensionale, periodische Bewegung, die vollständig im Endlichen stattfindet. Längs des Phasenporträts (also der geschlossenen Kurve im Raum, der vom Ort x und dem Impuls p aufgespannt wird) ist die Energie $E(x, p)$ erhalten (Integral der Bewegung).

(a) Begründen Sie, warum das Porträt symmetrisch unter Spiegelung an der x-Achse ist.

(b) Eine periodische Bahn mit Energie E umschließt die Fläche

$$F(E) = \oint p\, dx = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} p\ \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass die Periodendauer T gegeben ist durch

$$T = \frac{\mathrm{d}F(E)}{\mathrm{d}E}. \tag{4}$$

(c) Berechnen Sie $F(E)$ für einen harmonischen Oszillator mit $E(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$. Prüfen Sie mit Hilfe von (b), ob Ihr Ergebnis auf die korrekte Periodendauer führt.

8 Energieerhaltung im Zweiteilchensystem $*$

Betrachten Sie ein Zweiteilchensystem aus zwei Punktmassen m_1 und m_2, wobei $\dot{\vec{r}}_2 = 0$ gelten soll, d.h. m_2 befindet sich stets in Ruhe. Das Wechselwirkungspotential $U = U(\vec{r}_1)$ hängt dann nicht mehr vom Abstand der beiden Teilchen, sondern nur noch von der Position $\vec{r}_1$ ab. Zeigen Sie explizit, dass auch in diesem Spezialfall die Energie des Zweiteilchensystems erhalten ist.

9 Galilei-Transformation und ihre Inverse $**$

Unter einer Galilei-Transformation $(R, \vec{v}, \vec{c}, t_0)$ mit konstanten Vektoren $\vec{v}$, $\vec{c}$ und einer orthogonalen Drehmatrix R versteht man die Koordinatentransformation

$$\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r} - \vec{v}t - \vec{c}, \tag{5}$$

zusammen mit einer Zeittranslation

$$t \to t' = t - t_0. \tag{6}$$

(a) Berechnen Sie nun die Galilei-Transformation $(R, \vec{v}, \vec{c}, t_0)$, die sich durch Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen $(\hat{R}, \hat{\vec{v}}, \hat{\vec{c}}, \hat{t}_0)$ und $(\overline{R}, \overline{\vec{v}}, \overline{\vec{c}}, \overline{t}_0)$ ergibt.

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus (a), um die Inverse einer allgemeinen Galilei-Transformation zu bestimmen.

10 Potential für geschlossene Bahnkurven und Orbits *****

Betrachten Sie ein allgemeines radiales Potential $V(r)$, und sein effektives Potential $U(r)$. Die Bewegung einer Probemasse findet allein in der Ebene statt, lässt sich also parametrisieren durch die Polarkoordinaten r, θ in der Ebene. Bezeichne weiterhin r_1, r_2 die Umkehrpunkte und r_0 den Abstand, bei dem $U = U_0$ sein Minimum einnimmt.

(a) Zeigen sie zunächst die formale Loesung für $\theta(r)$:

$$\theta(r) = \theta(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E-U)}}$$

(b) Wechseln Sie im Integral die Integrationsvariable zu U und integrieren Sie beide Seiten der Gleichung nach E, nachdem Sie diese mit dem Faktor $1/\sqrt{U-E}$ versehen haben. Benutzen Sie schließlich

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

um auf das Ergebnis

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi L}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{U_0}^{U} \frac{\Delta\theta}{\sqrt{U-E}} dE$$

zu kommen, wobei $\Delta\theta(E)$ die Änderung in θ ist bei der vollständigen Bewegung von $r_1 \to r_2 \to r_1$

(c) Zeigen Sie, dass für geschlossene Bahnkurven gilt ($\alpha \in \mathbb{Q}$):

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha L}\sqrt{U - U_0}$$

(d) Durch Entwicklung der obigen Gleichung um r_0 bis zur 4. Ordnung können folgende Gleichungen hergeleitet werden:

$$U^{(2)} = \frac{\alpha^2 L^2}{m r_0^4},$$
$$U^{(4)} = \frac{3\alpha^2 L^2}{m r_0^4}\left(5c^2 + 8\frac{c}{r_0} + \frac{8}{r_0^2}\right)$$

mit

$$U^{(n)} := \frac{d^n U}{dr^n}|_{r=r_0} \qquad c := \frac{U^{(3)}}{3U^{(2)}}$$

Benutzen Sie diese Information, um schlussendlich zu zeigen, dass die einzigen radialen Potentiale, die für ein Intervall von Anfangsbedingungen (E, L) geschlossene Orbits erlauben, die Coulomb- und Harmonische Oszillator-Potentiale sind ($V = -k/r$ und $V = \frac{1}{2}kr^2$).