Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Felix Schwarzfischer, Korbinian Eschbaum

Wintersemester 2020/21
Ferienkurs Lineare Algebra

Probeklausur - Lösung

Bearbeitungszeit: 90 min
Gesamtpunktzahl: 100

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jede Matrix A aufgeschrieben werden kann als $A = B + C$, wobei $B = B^T$ und $C^T = -C$.

[6 Punkte]

Lösung:
Es müssen folgende Gleichungen gelten:

$$A = B + C \qquad A^T = B - C$$

Das lässt sich eindeutig auflösen zu:

$$B = \frac{A + A^T}{2} \qquad C = \frac{A - A^T}{2}$$

Damit ist die Lösung gefunden.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

und der Untervektorraum

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Skalarprodukt definiert.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich f.

[16 Punkte]

Lösung:

(a) Wir können die Abbildung über die folgende Matrix definieren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir sehen direkt, dass A symmetrisch ist, da $A^T = A$. Durch die Matrix selbst ist sie auch bilinear. Es bleibt zu zeigen, dass A positiv definit ist. Dafür berechnen wir die Eigenwerte.

$$0 = \det(A - \lambda E_3) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda = 2 \quad \vee \quad (2-\lambda)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \pm 1$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda = 1, 2, 3$ positiv und damit ist die Abbildung positiv definit. Somit ist f ein Skalarprodukt.

(b) Zunächst normieren wir den ersten Vektor und wenden anschließend das Gram-Schmid-Verfahren an.

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 16 \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1\rangle\, w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-5}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/8 \\ 27/16 \\ -21/16 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -6 \\ 27 \\ -21 \end{pmatrix} =: \frac{u}{16} \end{aligned}$$

$$\|u\|^2 = \begin{pmatrix} -6 & 27 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 27 \\ -21 \end{pmatrix} = 2160$$

$$\Rightarrow \qquad w_2 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{12\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -6 \\ 27 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Die Orthonormalbasis ist damit gegeben durch

$$B = \left\{ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{12\sqrt{15}}\begin{pmatrix} -6 \\ 27 \\ -21 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3

Es sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass gilt

$$f(\ker(f^k)) \subset \ker(f^{k-1})$$

[7 Punkte]

Lösung:
Sei $v \in f(\ker(f^k))$. Das heißt, $\exists\ w \in \ker(f^k) : \phi(w) = v$. Für dieses w gilt nun $f^k(w) = 0$. Also auch $0 = f^k(w) = f^{k-1}(f(w)) = f^{k-1}(v)$. Damit ist $v \in \ker(f^{k-1})$.

Aufgabe 4

Leiten Sie eine Formel für die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$ für $\det(A) \neq 0$ her.

[7 Punkte]

Lösung:
Wir nutzen die bewährte Methode zur Berechnung der Inversen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(II)}-\text{c(I)/a}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - bc/a & -c/a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{a(II)}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}-\text{b(II)}/\det\text{(A)}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 + bc/(ad - bc) & -ab/(ad - bc) \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{(II)}/\det\text{(A)}]{\text{(I)/a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/(ad - bc) & -b/(ad - bc) \\ 0 & 1 & -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{array}\right)$$

Also ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Betrachte den Vektorraum V über den Körper $\mathbb{C}$

(a) Gibt es für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Eigenvektoren ?

(b) Begründen Sie kurz, weshalb die Determinante jeder Matrix A das Produkt aus seinen Eigenwerten (unter Berücksichtigung der algebraischen Vielfachheiten) ist, also $\det(A) = \prod_i \lambda_i^{m_a(\lambda_i)}$

(c) Sei die Matrix A selbstadjungiert, also $A = \bar{A}^T$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte reell sind.

(d) Sei die Matrix A ähnlich zu B, also es existiert $S \in \mathrm{GL}_n$, sodass $A = S^{-1}BS$. Zeigen Sie, dass A und B dieselben Eigenwerte haben.

[12 Punkte]

Lösung

(a) Ja. das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine Nullstelle/ Lösung in $\mathbb{C}$. Da $m_g(\lambda) \geq 1$, ist garantiert, dass Eigenvektoren existieren.

(b) Das charakteristische Polynom von A hat als Nullstellen gerade die Eigenwerte von A gemäß algebraische Vielfachheit. Da wir uns im Körper $\mathbb{C}$ befinden, zerfällt χ_A in Linearfaktoren nach dem Fundamentalsatz der Algebra. Also $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \prod_i(\lambda_i - \lambda)^{m_a(\lambda_i)}$. Auswerten an der Stelle $\lambda = 0$ liefert dann das Ergebnis.

(c) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Berechne bzgl. des Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{v}^T Av = \bar{v}\bar{A}^T v = \overline{Av}^T v = \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Da $\langle v, v\rangle \neq 0$, ist $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Die Eigenwerte sind dann gleich, wenn das charakteristische Polynom dasselbe ist

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(S^{-1}BS - \lambda I_n) = \det(S^{-1}BS - S^{-1}\lambda I_n S) = \det(S^{-1}(B - \lambda I_n)S) =$$

$$\det(S^{-1})\det(B - \lambda I_n)\det(S) = \det(B - \lambda I_n)$$

Alternativ: Sei λ ein Eigenwert von A mit $Av = \lambda v$. Dann gilt

$$Av = S^{-1}BSv = \lambda v \qquad \Leftrightarrow \qquad SS^{-1}BSv = S\lambda v \qquad \Leftrightarrow \qquad BSv = \lambda Sv$$

Also ist λ auch ein Eigenwert von B zum Eigenvektor Sv. □

Aufgabe 6

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{R})$$

Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine Diagonalmatrix D und eine Basiswechselmatrix S angeben, sodass $D = S^{-1}AS$ ist. Wie viele verschiedene solcher Matrizen S gibt es?
Zur Kontrolle: Die Eigenwerte sind $\lambda = 6$ und $\lambda = 9$. Nutzen Sie zur Berechnung Laplace-Entwicklung.

[19 Punkte]

Lösung:

Für die Eigenwerte nutzen wir Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte.

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(\begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 8-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= (-1)(-1)\det\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}\right) + (8-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 \\ -1 & 8-\lambda \end{pmatrix}\right) + (-1)(-1)\det\left(\begin{pmatrix} 8-\lambda & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2(\lambda-8) - 2 + (8-\lambda)[(8-\lambda)^2 - 1] \\
&= 2(\lambda-9) - (\lambda-9+1)[(9-\lambda)^2 - 2(9-\lambda)] \\
&= (\lambda-9)[2 - (\lambda-9+1)(\lambda-9) - 2(\lambda-9+1)] \\
&= (\lambda-9)[-(\lambda-9)^2 - 3(\lambda-9)] \\
&= (\lambda-9)^2[-\lambda+9-3] \\
&= (\lambda-9)^2(6-\lambda)
\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda = 9$ und $\lambda = 6$. Für die Eigenräume gilt

$$E_9 = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Kern}\big(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\big) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_6 = \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{(I)}+2\text{(III)}}{\overset{\text{(II)}-\text{(III)}}{=}} \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{(III)}-\text{(II)}}{\overset{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(III)}}{=}} \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{(II)}/3}{\overset{\text{(I)}\cdot(-1)}{=}} \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{(I)}-\text{(II)}}{=} \operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Dadurch dass die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte gleich sind, ist A diagonalisierbar.
Also können wir die Matrizen folgendermaßen wählen:

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenräume sind Untervektorräume, also ist S nicht eindeutig und es gibt unendlich viele S, die man hier wählen kann.

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und invertierbar, also $A = A^T$. Seien λ, μ zwei verschiedene Eigenwerte von A. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu λ, μ orthogonal zueinander stehen.

[7 Punkte]

Lösung
Da $A = A^T$ gilt

$$0 = v^T A w - v^T A^T w = v^T A w - (Av)^T w = \langle v, Aw\rangle - \langle Av, w\rangle = \langle v, \mu w\rangle - \langle \lambda v, w\rangle = (\mu - \lambda)\langle v, w\rangle$$

Da nach Voraussetzung $\lambda \neq \mu$, muss $\langle v, w\rangle = 0$, v, w sind also orthogonal zueinander.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie über dem Körper $K = \mathbb{R}$

(a) die Eigenwerte von A,

(b) zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

[14 Punkte]

Lösung:

(a) Wir berechnen die Eigenwerte über das charakteristische Polynom und benutzen Laplace-Entwicklung nach den mittleren Spalten.

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= (-1-\lambda)^2 \det\left(\begin{pmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1-\lambda)^2[(5+\lambda)(1+\lambda)+4] = (1+\lambda)^2[\lambda^2+6\lambda+9]$$

$$\lambda^2+6\lambda+9 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left[-6 \pm \sqrt{36-4\cdot 9}\right] = -3$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -1$.

(b) Wir berechnen jeweils den Kern der Matrix.
$\lambda = -1$:

$$E_{-1} = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = -3$:

$$E_{-3} = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie zu folgender Matrix alle Eigenwerte, sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad n > 2$$

[12 Punkte]

Lösung:
Da offenbar $\det(B) = 0$, ist ein Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Und seitdem

$$\ker(B) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

ist die geometrische Vielfachheit $m_g(0) = \dim(\ker(B)) = n-1 \leq m_a(0)$. Die algebraische Vielfachheit $m_a(0)$ kann aber nicht n sein, da es noch einen weiteren Eigenwert gibt:

$$B \cdot \begin{pmatrix} z \\ z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+z\cdots+z \\ z+z\cdots+z \\ \vdots \\ z+z\cdots+z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} z \\ z \\ \vdots \\ z \end{pmatrix} \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Der zweite Eigenwert ist also $\lambda_2 = n$. Direkt sieht man ab, dass $m_g(n) = 1 \leq m_a(n)$. Mit diesem Ergebnis folgt, dass $m_a(0) = n-1$ und damit $m_a(1) = 1$, da $m_a(0) + m_a(1) = n$ gelten muss.