Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Felix Schwarzfischer, Korbinian Eschbaum

Wintersemester 2020/21
Ferienkurs Lineare Algebra

Probeklausur

Bearbeitungszeit: 90 min
Gesamtpunktzahl: 100

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jede Matrix A aufgeschrieben werden kann als $A = B + C$, wobei $B = B^T$ und $C^T = -C$.

[6 Punkte]

Aufgabe 2

Gegeben seien die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

und der Untervektorraum

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Skalarprodukt definiert.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich f.

[16 Punkte]

Aufgabe 3

Es sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass gilt

$$f(\ker(f^k)) \subset \ker(f^{k-1})$$

[7 Punkte]

Aufgabe 4

Leiten Sie eine Formel für die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$ für $\det(A) \neq 0$ her.

[7 Punkte]

Aufgabe 5

Betrachte den Vektorraum V über den Körper $\mathbb{C}$

(a) Gibt es für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Eigenvektoren ?

(b) Begründen Sie kurz, weshalb die Determinante jeder Matrix A das Produkt aus seinen Eigenwerten (unter Berücksichtigung der algebraischen Vielfachheiten) ist, also $\det(A) = \prod_i \lambda_i^{m_a(\lambda_i)}$

(c) Sei die Matrix A selbstadjungiert, also $A = \bar{A}^T$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte reell sind.

(d) Sei die Matrix A ähnlich zu B, also es existiert $S \in \mathrm{GL}_n$, sodass $A = S^{-1}BS$. Zeigen Sie, dass A und B dieselben Eigenwerte haben.

[12 Punkte]

Aufgabe 6

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, 3, \mathbb{R})$$

Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine Diagonalmatrix D und eine Basiswechselmatrix S angeben, sodass $D = S^{-1}AS$ ist. Wie viele verschiedene solcher Matrizen S gibt es?
Zur Kontrolle: Die Eigenwerte sind $\lambda = 6$ und $\lambda = 9$. Nutzen Sie zur Berechnung Laplace-Entwicklung.

[19 Punkte]

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und invertierbar, also $A = A^T$. Seien λ, μ zwei verschiedene Eigenwerte von A. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu λ, μ orthogonal zueinander stehen.

[7 Punkte]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie über dem Körper $K = \mathbb{R}$

(a) die Eigenwerte von A,

(b) zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

[14 Punkte]

Aufgabe 9

Berechnen Sie zu folgender Matrix alle Eigenwerte, sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad n > 2$$

[12 Punkte]