Übungsblatt 4 - Lösung

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ Endomorphismen mit $g^2 = \mathrm{id}$ und $f^2 = a \cdot f$ für ein gewisses $a \in K \setminus \{0\}$. Geben Sie alle möglichen Eigenwerte von f, g für $K = \mathbb{C}$ an.

Lösung:
Wir betrachten jeweils die Eigenwertgleichung.

$$g(v) = \lambda v \qquad \Rightarrow \qquad v = g^2(v) = \lambda^2 v \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 1$$

$$f(v) = \lambda v \qquad \Rightarrow \qquad a\lambda v = af(v) = f^2(v) = \lambda^2 v \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(a - \lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \in \{0, a\}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit $f(e_j) = e_{j+1}$ und $f(e_n) = e_1$, wobei $(e_j)_i = \delta_{ji}$ den jeweiligen Einheitsvektor darstellt.

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$ ist.

(b) Geben Sie für $K = \mathbb{C}$ alle Eigenwerte λ von f und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_λ an.

Lösung:

(a) Zunächst bestimmen wir die Darstellungsmatrix $M_f \in \mathrm{Mat}(n, n, K)$ in der Standardbasis. Diese können wir aus der gegebenen Gleichung ablesen.

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lässt sich nun aus der entsprechenden Determinante berechnen. Hierzu nutzen wir Laplace-Entwicklung in der ersten Zeile.

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda E) &= \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & & 1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= -\lambda \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & & & \\ 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right)}_{=(-\lambda)^{n-1}} + (-1)^{n+1} \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=1} \\
&= (-\lambda)^n - (-1)^n
\end{aligned}$$

Also ist $\chi_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$.

(b) Wir sehen unmittelbar, dass die Eigenwerte $\lambda^n = 1$ genügen müssen. Also sind die Eigenwerte $\lambda_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n}$ für $k = 1, \ldots, n$.

Um die Eigenvektoren zu bestimmen, beschreiben wir einen Vektor in seiner allgemeinsten Form.

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$$

$$\Rightarrow \qquad e^{2\pi i k/n} \sum_{j=1}^{n} a_j e_j = e^{2\pi i k/n} v_k = f(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_{j+1} + a_n e_1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$a_{j+1} = e^{-2\pi i k/n} a_j \quad \text{für } j \geq 2, \qquad a_1 = e^{-2\pi i k/n} a_n$$

Wählen wir nun $a_1 = e^{-2\pi i k/n}$, so können wir als Eigenvektor wählen:

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi i jk/n} e_j$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2, 2, K)$ gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}\right].$$

Hier bezeichnet $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\dim(A)} A_{ii}$ die *Spur* von A.

(b) Sei $\mathbb{R}^n$ ein euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt.

Zeigen Sie: Falls $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar ist und die Eigenvektoren von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann ist A symmetrisch, d.h. $A^T = A$.

(c) Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen oder begründen Sie, warum sie nicht diagonalisierbar sind.

a) $\begin{pmatrix} 2020 & 2021 \\ 2021 & 2020 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Für die Eigenwerte von A gilt

$$\det(A - \lambda E_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}\right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}\right].$$

□

(b) Wir bezeichnen die Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A. Die Spalten der Basiswechselmatrix C sind damit gegeben durch diese Eigenvektoren. Nachdem diese normiert sind, bestehen die Zeilen von C^{-1} aus den Vektoren $v_1^T, \ldots, v_n^T$, denn:

$$(C^{-1}C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (C^{-1})_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (v_i)_k (v_j)_k = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad C^{-1} = C^T$$

Damit gilt

$$A^T = (CDC^{-1})^T = (C^T)^T D^T C^T = CDC^T = CDC^{-1} = A.$$

□

(c) Aus Teilaufgabe (b) können wir schließen, dass die Symmetrie von A eine notwendige Bedingung für Diagonalisierbarkeit ist. Die Eigenwerte erhalten wir aus der in (a) bewiesenen Gleichung.

a) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4041$.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4041 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Nicht diagonalisierbar.

$$\lambda = 1, \qquad E_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Die algebraische Vielfachheit ist also $m_a(1) = 2$ und die geometrische Vielfachheit ist $m_g(1) = 1$. Nachdem beide nicht übereinstimmen, ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

c) Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{26}$

$$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{26} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{26} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{26} & -1-\sqrt{26} \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = 2 \pm 6$.

$$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{6} & -1-\sqrt{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$.
Zeigen Sie, dass $f = \lambda\mathrm{id}$ für ein $\lambda \in K$ genau dann ist, wenn jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist.

Lösung:

„$\Rightarrow$“: Falls $f = \lambda\mathrm{id}$, so gilt $f(v) = \lambda\mathrm{id}(v) = \lambda v$ für alle $v \in V$.

„$\Leftarrow$“: Wir müssen zeigen, dass alle Vektoren Eigenvektoren von f zum selben Eigenwert sind.
Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$ linear unabhängig. Dann gilt nach Annahme für jeweils ein $\lambda, \mu, \nu, \kappa \in K$:

$$f(v) = \lambda v, \qquad f(w) = \mu w, \qquad f(v+w) = \nu(v+w), \qquad f(v-w) = \kappa(v-w)$$

Andererseits gilt auch

$$\lambda v + \mu w = f(v) + f(w) = f(v+w) = \nu(v+w) = \nu v + \nu w \tag{1}$$
$$\lambda v - \mu w = f(v) - f(w) = f(v-w) = \kappa(v-w) = \kappa v - \kappa w \tag{2}$$

Addieren wir nun beide Gleichungen aufeinander, so erhalten wir

$$2\lambda v = (\nu + \kappa)v + (\nu - \kappa)w$$

Nachdem v und w nach Annahme linear unabhängig voneinander sind, muss $\nu = \kappa$ sein und damit

$$2\lambda = \nu + \kappa = 2\nu \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \lambda = \nu.$$

Wenn wir nun (1) − (2) betrachten, so erhalten wir

$$2\mu w = 2\nu w \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \nu = \kappa = \lambda$$

Also sind alle Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von f zum selben Eigenwert λ.
Daraus können wir schließen, dass $f(v) = \lambda v = \lambda\mathrm{id}(v)$ für alle v und damit $f = \lambda\mathrm{id}$.

$\square$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -9 & -2 \\ 7 & 8 & 11 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Für die Eigenwerte suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Für die Eigenräume ist das jeweilige Gleichungssystem $(A - \lambda E) \cdot x = 0$ zu lösen. Der Eigenraum wird dann von diesen x aufgespannt. Hier die Ergebnisse:

$$\lambda_A \in \{-3, -2, 1, 2\}, \quad \mathbb{E}_{-3} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \mathbb{E}_{-2} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \ \mathbb{E}_{1} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \ \mathbb{E}_{2} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_B \in \{1, 2\}, \qquad \mathbb{E}_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \mathbb{E}_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\lambda_C = 2, \qquad \mathbb{E}_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 6

Die Spur haben Sie bereits in mehreren Übungen verwendet:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}, \qquad A \in \operatorname{Mat}(n, n, K)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Argumente der Spur zyklisch vertauschbar sind, also $\operatorname{tr}(A_1 \cdots A_k) = \operatorname{tr}(A_k A_1 \cdots A_{k-1})$, falls alle A_i die gleiche Dimension haben, und ferner, dass die Spur damit invariant unter Basiswechsel ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass die Spur einer diagonalisierbaren Matrix die Summe ihrer Eigenwerte ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Determinante einer diagonalisierbaren Matrix das Produkt ihrer Eigenwerte ist.

Anmerkung: Im Allgemeinen ist die Diagonalisierbarkeit keine Voraussetzung für diese Eigenschaften. Wir wollen diese jedoch der Einfachheit halber hier behalten.

Lösung:

(a) Für die Spur gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A_1 \cdots A_k) &= \sum_{i=1}^{n} (A_1 \cdots A_k)_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} (A_1 \cdots A_{k-1})_{ij} (A_k)_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} (A_k)_{ji} (A_1 \cdots A_{k-1})_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (A_k A_1 \cdots A_{k-1})_{jj} = \operatorname{tr}(A_k A_1 \cdots A_{k-1}) \end{aligned}$$

Unter Basiswechsel gilt für die Spur

$$\operatorname{tr}\big(C^{-1} A C\big) = \operatorname{tr}\big(C C^{-1} A\big) = \operatorname{tr}(A)$$

Somit ist die Spur invariant unter Basiswechsel. □

(b) Sei A eine diagonalisierbare Matrix mit Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und Basiswechselmatrix C. Die Diagonalmatrix enthält die Eigenwerte von A. Nachdem die Spur invariant unter Basiswechsel ist, gilt

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

□

(c) Wir nutzen die Eigenschaften der Determinante aus der Vorlesung aus. Die Determinante einer Diagonalmatrix ist trivial.

$$\det(A) = \det\bigl(CDC^{-1}\bigr) = \det(C)\det(D)\det\bigl(C^{-1}\bigr) = \frac{\det(C)}{\det(C)}\det(D) = \prod_{i=1}^{n} D_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$\square$

Aufgabe 7

Betrachten Sie den Untervektorraum $W = \text{span}(1, x, x^2) \subseteq V = \mathbb{R}[x]$. Wir definieren folgende Abbildung:

$$u : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Zeigen Sie, dass W tatsächlich ein Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass u ein Skalarprodukt definiert.

(c) Wir definieren nun einen weiteren Untervektorraum $U = \text{span}(1 - x, x - x^2) \subset W$ (dies muss nicht gezeigt werden). Geben Sie den zugehörigen orthogonalen Raum $U_\perp := \{w \in W \mid \langle v, w\rangle_u = 0 \quad \forall v \in U\}$ in Bezug auf das Skalarprodukt u an.

Hinweis: Geben Sie eine Basis von U in Vektorschreibweise an und finden Sie die Matrix A, welche in dieser Form das Skalarprodukt definiert $u(w, v) = w^T Av$.

Lösung:

(a) W ist als Spann von drei Vektoren definiert. Somit ist es ein Untervektorraum. $\square$

(b) **Bilinearität:**

Seien $f_{1,2}, g \in V$ und $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(f_1 + af_2, g) =& \int_0^1 [f_1(x) + af_2(x)]g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_1(x)g(x)\,\mathrm{d}x + a\int_0^1 f_2(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ =& u(f_1, g) + au(f_2, g) \end{aligned}$$

Analog für das zweite Argument.

Positiv-Definitheit:

Sei $f \in V$.

$$u(f, f) = \int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x \begin{cases} > 0 & \text{falls } f \neq 0 \\ = 0 & \text{falls } f = 0 \end{cases}$$

Symmetrie:

Seien $f, g \in V$.

$$u(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = u(g, f)$$

Also definiert u ein Skalarprodukt. $\square$

(c) Wir werten das Skalarprodukt in der Standardbasis aus.

$$\begin{aligned} u(1,1) &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1, \qquad & u(1,x) &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad & u(1,x^2) &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \\ u(x,x) &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad & u(x,x^2) &= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}, \qquad & u(x^2,x^2) &= \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Daraus können wir die Abbildungsmatrix A schließen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun die Vektoren $(a_1, a_2, a_3)^T$ so wählen, dass diese für eine beliebige Linearkombination $b_1(1, -1, 0)^T + b_2(0, 1, -1)^T$ orthogonal auf dieser stehen, also

$$\begin{aligned}
&(b_1, b_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} = 0 \qquad \forall b_1, b_2\\
\Leftrightarrow \qquad &(b_1, b_2)\begin{pmatrix}1/2 & 1/6 & 1/12\\ 1/6 & 1/12 & 1/20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} = 0 \qquad \forall b_1, b_2\\
\Rightarrow \qquad &\begin{pmatrix}1/2 & 1/6 & 1/12\\ 1/6 & 1/12 & 1/20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir nun mit dem Gaußalgorithmus lösen.

$$\begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 10 & 5 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & 5/3 & 4/3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 & 0 & -3/5\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}10 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad a \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\ -8\\ 10\end{pmatrix}\right)$$

Übersetzen wir dies nun, so erhalten wir $U_\perp = \operatorname{span}(1 - 8x + 10x^2)$.

Aufgabe 8

Gegeben sei

$$A(\phi) = \begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{R}), \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

(a) Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine Diagonalmatrix $D \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{C})$ und eine Basiswechselmatrix $C \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{C})$ angeben, sodass $D = C^{-1}AC$.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass $A(\phi)$ eine Drehmatrix um den Winkel $\phi \in \mathbb{R}$ ist, d.h. dass $\|A(\phi)v\| = \|v\|$, $\langle v, A(\phi)v\rangle = \cos(\phi)\|v\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ und $A(\phi)A(\psi) = A(\phi + \psi)$ für alle $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Die Norm werde durch das Standardskalarprodukt induziert.

Lösung:

(a) Zuerst sind die Eigenwerte zu finden.

$$\begin{aligned}
\det(A(\phi) - \lambda E) = \det\left(\begin{pmatrix}\cos(\phi) - \lambda & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda\end{pmatrix}\right) &= (\cos(\phi) - \lambda)^2 + \sin^2(\phi) = 0\\
\Rightarrow \qquad \lambda_\pm = \cos(\phi) \pm \mathrm{i}\sin(\phi) &= \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi}
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Eigenräume

$$\begin{pmatrix}\cos(\phi) - (\cos(\phi) \pm \mathrm{i}\sin(\phi)) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - (\cos(\phi) \pm \mathrm{i}\sin(\phi))\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\mp\mathrm{i}\sin(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \mp\mathrm{i}\sin(\phi)\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\pm\mathrm{i} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mp\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

Also sind die gesuchten Matrizen

$$D = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

(b) Die ersten beiden Identitäten sind einfach nachzurechnen. Wir haben C so gewählt, dass $C^{-1} = C^*$ ist.

$$\begin{aligned}
\|A(\phi)v\|^2 &= v^*A^*Av = v^*(CDC^*)^*CDC^*v = v^*CD^*C^*CDC^*v = v^*CD^*DC^*v\\
&= v^*C\underbrace{\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\end{pmatrix}}_{=E}C^*v = v^*\underbrace{CC^*}_{=E}v = \|v\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle v, A(\phi)v\rangle &= v^* A(\phi) v = (v_1, v_2)\begin{pmatrix}\cos(\phi)v_1 - \sin(\phi)v_2\\ \sin(\phi)v_1 + \cos(\phi)v_2\end{pmatrix}\\
&= \cos(\phi)|v_1|^2 - \sin(\phi)v_1v_2 + \sin(\phi)v_1v_2 + \cos(\phi)|v_2|^2 = \cos(\phi)\|v\|^2
\end{aligned}
$$

Für die letzte Identität gilt

$$
\begin{aligned}
A(\phi)A(\psi) &= CD(\phi)C^{-1}C^{-1}CD(\psi)C^{-1} = C\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\end{pmatrix}C^{-1}\\
&= C\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\psi)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi+\psi)}\end{pmatrix}C^{-1} = A(\phi+\psi)
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 9

Das Matrixexponential ist definiert über

$$
\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.
$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, dann ist $\mathrm{e}^D = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$.

(b) Ist A diagonalisierbar, dann gilt

$$
\det\big(\mathrm{e}^A\big) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)}, \qquad \operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{\dim(A)} A_{ii}.
$$

Lösung:

(a) Zunächst zeigen wir induktiv, dass $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsanfang $k = 0$: $D^0 = E = \operatorname{diag}(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$
Induktionsschritt:

$$
D^{k+1} = D^k D = \begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{k+1}\end{pmatrix}
$$

Nun benutzen wir die Definition der Exponentialfunktion und nutzen die Linearität der Matrix aus.

$$
e^D = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\right) = \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\big)
$$

□

(b) Wir setzen $n := \dim(A)$. Ist A diagonalisierbar, so bedeutet dies, dass eine invertierbare Matrix C existiert, sodass $A = CDC^{-1}$ mit Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist. Ferner nutzen wir aus, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ bei dimensionsgleichen A, B und $\det\big(A^{-1}\big) = \det(A)^{-1}$ ist.

$$
\begin{aligned}
\det\big(\mathrm{e}^A\big) &= \det\Big(\mathrm{e}^{CDC^{-1}}\Big) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(CDC^{-1})^k\right) = \det\left(C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k\right)C^{-1}\right) = \det(C)\det(C)^{-1}\det\big(\mathrm{e}^D\big)\\
&\overset{\text{(a)}}{=} \det\left(\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n}\end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_1}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(D)} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)}
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Spur invariant unter Basiswechsel ist. □

Aufgabe 10

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Es sei W der Spann der folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Basis von $W_\perp$, indem Sie die Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen und das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

Lösung:
Wir können die Vektoren einfach zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir das Orthogonalisierungsverfahren an.

$$\begin{aligned}
& & w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}\\
\tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1\rangle\, w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} & w_2 &= \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
\tilde{w}_3 &= v_3 - \langle v_3, w_1\rangle\, w_1 - \langle v_3, w_2\rangle\, w_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\\0\\-2\\-4\end{pmatrix} & w_3 &= \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}5\\0\\-2\\-4\end{pmatrix}\\
\tilde{w}_4 &= v_4 - \langle v_4, w_1\rangle\, w_1 - \langle v_4, w_2\rangle\, w_2 - \langle v_4, w_3\rangle\, w_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix} & w_4 &= \frac{\tilde{w}_4}{\|\tilde{w}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit ist eine Basis von $W_\perp$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix}5\\0\\-2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 11

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix

$$U = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}20 & 4 & 22\\ 20 & 10 & -20\\ -10 & 28 & 4\end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Das ist eine Drehung (muss nicht gezeigt werden!).
Was ist die Achse dieser Drehung und was ist der Kosinus des Drehwinkels?

Lösung:

Möglichkeit 1: Berechnung der Eigenwerte

Wir haben oben bereits gesehen, dass die Eigenwerte einer zweidimensionalen Drehmatrix $e^{\pm i\phi}$ mit Drehwinkel ϕ sind. Wir können also annehmen, dass eine Hauptachsentransformation (Diagonalisierung) die Drehachse sowie den Drehwinkel liefert. Nach längerer Rechnung kommen wir auf die Eigenwerte 1, und $1/15 \pm 4i\sqrt{14}/15$. 1 entspricht der Drehachse. Der zugehörige Eigenvektor ist $(3,2,1)^T$. Der Realteil der anderen Eigenwerte liefert gemäß der Euler'schen Identität $e^{\pm i\phi} = \cos(\phi) \pm i\sin(\phi)$ den Kosinus des Zwischenwinkels 1/15.

Möglichkeit 2: Anschauliche Betrachtung
Die Drehachse entspricht einem Vektor, der sich unter U nicht ändern wird. Wir erhalten also die Eigenwertgleichung $Uv = v$ und suchen den Eigenvektor v von U zum Eigenwert 1.

$$\begin{pmatrix} 20-30\cdot 1 & 4 & 22 \\ 20 & 10-30\cdot 1 & -20 \\ -10 & 28 & 4-30\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 22 \\ 20 & -20 & -20 \\ -10 & 28 & -26 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(III)+5(II)}]{\text{(I)+5(II)}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(III)+3(I)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(I)+(II)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad v \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Für den Zwischenwinkel können wir einen Einheitsvektor w senkrecht auf v wählen und U darauf wirken lassen. Hier benutzen wir die Definition des Kosinus aus der Vorlesung $\cos(\phi) = \langle v, w\rangle / \|v\|\|w\|$.

$$w = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\phi) = \langle w, Uw\rangle = \frac{1}{13\cdot 30}(2,-3,0) \begin{pmatrix} 20 & 4 & 22 \\ 20 & 10 & -20 \\ -10 & 28 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13\cdot 30}(2,-3,0) \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ -104 \end{pmatrix} = \frac{26}{13\cdot 30} = \frac{1}{15}$$

Aufgabe 12

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ und $v := \{v_j\}_{1\le j\le n}$ eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarprodukts. Weiterhin bezeichne $\phi_V : V \to \mathbb{R}^n$ die Koordinatenabbildung bezüglich v.

(a) Seien $a, b \in V$ beliebig, aber fest, und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ bezeichne das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass dann gilt $\langle a, b\rangle_V = \langle \phi_V(a), \phi_V(b)\rangle_{\mathbb{R}^n}$.

(b) Zeigen Sie:
$$a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad \phi_V(a) \perp \phi_V(b) \qquad \forall a, b \in V$$

(c) Warum sind die Aussagen in den vorigen Teilaufgaben falsch, falls v keine Orthonormalbasis ist? Nennen Sie ein Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) Nachdem v eine Orthonormalbasis ist, können wir die Vektoren a, b als Linearkombinationen von v darstellen.
$$a = \sum_{i=1}^n \langle a, v_i\rangle\, v_i =: \sum_{i=1}^n a_i v_i, \qquad b = \sum_{i=1}^n \langle b, v_i\rangle\, v_i =: \sum_{i=1}^n b_i v_i$$
Ferner wissen wir, dass die Koordinatendarstellung ϕ_V bezüglich v mit $\phi_V(v_j) = e_j$ linear ist. Unter Ausnutzung der Linearität von ϕ_V und den Skalarprodukten, folgt:
$$\langle a, b\rangle_V = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle_V = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j\rangle_V = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$
$$\langle \phi_V(a), \phi_V(b)\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \phi_V\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right), \phi_V\left(\sum_{j=1}^n b_j v_j\right)\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \phi_V(v_i), \sum_{j=1}^n b_j \phi_V(v_j)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$
$$= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$
Also ist $\langle a, b\rangle_V = \langle \phi_V(a), \phi_V(b)\rangle_{\mathbb{R}^n}$. □

(b) Aus der vorherigen Teilaufgabe folgt

$$a \perp b \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \langle a, b \rangle_V = \langle \phi_V(a), \phi_V(b) \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \Leftrightarrow \qquad \phi_V(a) \perp \phi_V(b)$$

□

(c) Ohne Orthonormalbasis können wir die Zerlegung in einzelne Komponenten aus (a) i.A. nicht vornehmen. Außerdm gilt dann nicht mehr $\langle v_i, v_j \rangle_V = \delta_{ij}$, aber $\langle \phi_V(v_i), \phi_V(v_j) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij}$ schon.

Als Beispiel betrachten wir den Raum der reellen Polynome $\mathbb{R}[x]$ bis zum Grad 1 zusammen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Wählen wir nun die Basis $v = \{1, x\}$, so gilt für das Skalarprodukt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Es handelt sich also um keine Orthonormalbasis. Hingegen die Abbildung

$$\langle \phi(v_1), \phi(v_2) \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Also gelten die obigen Aussagen hier nicht mehr.

Aufgabe 13

Die Vektoren $v_1 = (0, \mathrm{i}, 1)^T$ und $v_2 = (2, -\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})^T$ spannen einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ auf. Bestimmen Sie zunächst eine Orthonormalbasis des Unterraums, wobei auf $\mathbb{C}^3$ das Standardskalarprodukt zugrundegelegt wurde.
Zeigen Sie, dass $w = (2, 1/2, 2 + \mathrm{i}/2)^T$ in diesem Unterraum liegt und stellen Sie w als Linearkombination der Vektoren der von Ihnen gefundenen Orthonormalbasis dar.

Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Orthonormalbasis $\{b_1, b_2\}$ des Unterraums.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\
\tilde{b}_2 &= v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle \, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i}/2 \end{pmatrix} \\
b_2 &= \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \sqrt{\frac{2}{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - 2\mathrm{i} \\ 2 + \mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass w im aufgespannten Vektorraum liegt, muss gezeigt werden, dass das Gleichungssystem $a_1 b_1 + a_2 = w$ eindeutig lösbar ist. Der Einfachheit halber verzichten wir hier auf die Normierungsfaktoren.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 2 \\ \mathrm{i} & 1 - 2\mathrm{i} & 1/2 \\ 1 & 2 + \mathrm{i} & 2 + \mathrm{i}/2 \end{array} \right) \underset{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(III)}}{\xrightarrow{\text{(II)}-\mathrm{i}\text{(III)}}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 + \mathrm{i} & 2 + \mathrm{i}/2 \\ 0 & 2 - 4\mathrm{i} & 1 - 2\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(II)}-(2-4\mathrm{i})\text{(III)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 + \mathrm{i} & 2 + \mathrm{i}/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}-(2+\mathrm{i})\text{(II)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das LGS ist offenbar eindeutig lösbar und wir können w unter Zuhilfenahme der Normierungsfaktoren schreiben als

$$w = \sqrt{2} b_1 + \frac{\sqrt{26}}{2} b_2.$$