Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ Endomorphismen mit $g^2 = \text{id}$ und $f^2 = a \cdot f$ für ein gewisses $a \in K \setminus \{0\}$. Geben Sie alle möglichen Eigenwerte von f, g für $K = \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ mit $f(e_j) = e_{j+1}$ und $f(e_n) = e_1$, wobei $(e_j)_i = \delta_{ji}$ den jeweiligen Einheitsvektor darstellt.

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - 1)$ ist.

(b) Geben Sie für $K = \mathbb{C}$ alle Eigenwerte λ von f und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_λ an.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Matrix $A \in \text{Mat}(2, 2, K)$ gilt

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\text{tr}(A) \pm \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4\det(A)}\right].$$

Hier bezeichnet $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\dim(A)} A_{ii}$ die *Spur* von A.

(b) Sei $\mathbb{R}^n$ ein euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt.

Zeigen Sie: Falls $A \in \text{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar ist und die Eigenvektoren von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, dann ist A symmetrisch, d.h. $A^T = A$.

(c) Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen oder begründen Sie, warum sie nicht diagonalisierbar sind.

a) $\begin{pmatrix} 2020 & 2021 \\ 2021 & 2020 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \text{End}(V)$.
Zeigen Sie, dass $f = \lambda\text{id}$ für ein $\lambda \in K$ genau dann ist, wenn jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -9 & -2 \\ 7 & 8 & 11 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -9 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Die Spur haben Sie bereits in mehreren Übungen verwendet:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}, \qquad A \in \operatorname{Mat}(n, n, K)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Argumente der Spur zyklisch vertauschbar sind, also $\operatorname{tr}(A_1 \cdots A_k) = \operatorname{tr}(A_k A_1 \cdots A_{k-1})$, falls alle A_i die gleiche Dimension haben, und ferner, dass die Spur damit invariant unter Basiswechsel ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass die Spur einer diagonalisierbaren Matrix die Summe ihrer Eigenwerte ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Determinante einer diagonalisierbaren Matrix das Produkt ihrer Eigenwerte ist.

Anmerkung: Im Allgemeinen ist die Diagonalisierbarkeit keine Voraussetzung für diese Eigenschaften. Wir wollen diese jedoch der Einfachheit halber hier behalten.

Aufgabe 7

Betrachten Sie den Untervektorraum $W = \operatorname{span}(1, x, x^2) \subseteq V = \mathbb{R}[x]$. Wir definieren folgende Abbildung:

$$u : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Zeigen Sie, dass W tatsächlich ein Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass u ein Skalarprodukt definiert.

(c) Wir definieren nun einen weiteren Untervektorraum $U = \operatorname{span}(1-x, x-x^2) \subset W$ (dies muss nicht gezeigt werden). Geben Sie den zugehörigen orthogonalen Raum $U_\perp := \{w \in W \mid \langle v, w\rangle_u = 0 \quad \forall v \in U\}$ in Bezug auf das Skalarprodukt u an.

Hinweis: Geben Sie eine Basis von U in Vektorschreibweise an und finden Sie die Matrix A, welche in dieser Form das Skalarprodukt definiert $u(w, v) = w^T A v$.

Aufgabe 8

Gegeben sei

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{R}), \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

(a) Diagonalisieren Sie A, indem Sie eine Diagonalmatrix $D \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{C})$ und eine Basiswechselmatrix $C \in \operatorname{Mat}(2, 2, \mathbb{C})$ angeben, sodass $D = C^{-1}AC$.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass $A(\phi)$ eine Drehmatrix um den Winkel $\phi \in \mathbb{R}$ ist, d.h. dass $\|A(\phi)v\| = \|v\|$, $\langle v, A(\phi)v\rangle = \cos(\phi)\|v\|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ und $A(\phi)A(\psi) = A(\phi + \psi)$ für alle $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Die Norm werde durch das Standardskalarprodukt induziert.

Aufgabe 9

Das Matrixexponential ist definiert über

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix, dann ist $\mathrm{e}^D = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$.

(b) Ist A diagonalisierbar, dann gilt

$$\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)}, \qquad \operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{\dim(A)} A_{ii}.$$

Aufgabe 10

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Es sei W der Spann der folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Basis von $W_\perp$, indem Sie die Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen und das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren anwenden.

Aufgabe 11

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix

$$U = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 20 & 4 & 22 \\ 20 & 10 & -20 \\ -10 & 28 & 4 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Das ist eine Drehung (muss nicht gezeigt werden!).
Was ist die Achse dieser Drehung und was ist der Kosinus des Drehwinkels?

Aufgabe 12

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $v := \{v_j\}_{1 \leq j \leq n}$ eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarprodukts. Weiterhin bezeichne $\phi_V : V \to \mathbb{R}^n$ die Koordinatenabbildung bezüglich v.

(a) Seien $a, b \in V$ beliebig, aber fest, und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ bezeichne das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass dann gilt $\langle a, b \rangle_V = \langle \phi_V(a), \phi_V(b) \rangle_{\mathbb{R}^n}$.

(b) Zeigen Sie:
$$a \perp b \quad \Leftrightarrow \quad \phi_V(a) \perp \phi_V(b) \qquad \forall a, b \in V$$

(c) Warum sind die Aussagen in den vorigen Teilaufgaben falsch, falls v keine Orthonormalbasis ist? Nennen Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 13

Die Vektoren $v_1 = (0, \mathrm{i}, 1)^T$ und $v_2 = (2, -\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})^T$ spannen einen zweidimensionalen Unterraum des $\mathbb{C}^3$ auf. Bestimmen Sie zunächst eine Orthonormalbasis des Unterraums, wobei auf $\mathbb{C}^3$ das Standardskalarprodukt zugrundegelegt wurde.
Zeigen Sie, dass $w = (2, 1/2, 2 + \mathrm{i}/2)^T$ in diesem Unterraum liegt und stellen Sie w als Linearkombination der Vektoren der von Ihnen gefundenen Orthonormalbasis dar.