Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Felix Schwarzfischer, Korbinian Eschbaum

Übungsblatt 3 - Lösung

Anmerkung: Aus organisatorischen Gründen wird das Kapitel Skalarprodukte schon in diesem Blatt behandelt.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & -1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(II)}}{\xrightarrow{\text{(I)}-3\text{(II)}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{(II)}+\text{(III)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Wir haben also die freien Parameter x_2, x_3, x_5.
Lösung der inhomogenen Gleichung mit $x_2 = x_3 = x_5 = 1$: $x_1 = 2$, $x_4 = -3$
Lösung der homogenen Gleichung mit $x_2 = 1$, $x_3 = x_5 = 0$: $x_1 = 1$, $x_4 = -6$
Lösung der homogenen Gleichung mit $x_3 = 1$, $x_2 = x_5 = 0$: $x_1 = -2$, $x_4 = 7$
Lösung der homogenen Gleichung mit $x_5 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$: $x_1 = 2$, $x_4 = 0$

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{(III)}-4\text{(I)}}{\xrightarrow{\text{(II)}-2\text{(II)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{(II)},\text{(II)}\cdot(-1)}{\xrightarrow{\text{(II)}\leftrightarrow\text{(III)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 11 & -1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{(III)}-5\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -14 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(III)}/(-14)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9/14 \end{array}\right) \underset{\text{(II)}-5\text{(III)}}{\xrightarrow{\text{(I)}-2\text{(III)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 27/14 \\ 0 & 1 & 0 & 17/14 \\ 0 & 0 & 1 & -9/14 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{(I)}-2\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 17/14 \\ 0 & 0 & 1 & -9/14 \end{array}\right)$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 17/14 \\ -9/14 \end{pmatrix} \right\}$$

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{(II)}-3\text{(I)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -4 \end{array}\right) \overset{\text{(II)}/(-7)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 & 4/7 \end{array}\right) \overset{\text{(I)}-3\text{(II)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 5/7 & 4/7 \end{array}\right)$$

Lösung der inhomogenen Gleichung mit $x_3 = 1$: $x_2 = -1/7$, $x_1 = 3/7$

Lösung der homogenen Gleichung mit $x_3 = 7$: $x_2 = -5$, $x_1 = 1$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -1/7 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir benutzen den Gauß-Algorithmus auf die Zeilen an, um eine untere Dreiecksmatrix zu erhalten.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{(II)}-\text{(III)}}{\overset{\text{(II)}+\text{(IV)}}{=}} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(III)}}{=} -\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\text{(II)}+7\text{(III)}}{=} -\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right) = 11$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w \end{pmatrix}\right) = xyzw.$$

Lösung:
Zunächst subtrahieren wir die erste Zeile von den anderen Zeilen. Anschließend benutzen wir Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}\right)$$

$$= xyzw$$

□

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Matrix

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\det(M_n)$.
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion nach n.

Lösung:
Zunächst berechnen wir die Determinante der ersten drei Matrizen nach den bekannten Regeln.

$$\begin{aligned}
\det(M_1) &= \det((2)) = 2 \\
\det(M_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 - 1 = 3 \\
\det(M_3) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 8 - 2 - 2 = 4
\end{aligned}$$

Daraus können wir vermuten, dass $\det(M_n) = n+1$. Das können wir nun mit vollständiger Induktion beweisen. Den Induktionsanfang haben wir bereits mit $\det(M_1) = 2 = 1+1$ bewiesen. Für den Induktionsschritt benötigen wir Laplace-Entwicklung.

$$\begin{aligned}
\det(M_{n+1}) &= \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots \\ 1 & M_n & \\ \vdots & & \end{pmatrix}\right) = 2\det\left(M_n\right) - \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 0 & M_{n-1} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}\right) = 2\det(M_n) - \det(M_{n-1}) \\
&\overset{!}{=} 2(n+1) - n = n + 2 = (n+1) + 1
\end{aligned}$$

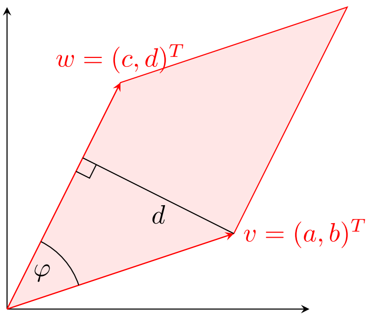
□

Also ist $\det(M_n) = n+1$.

Aufgabe 5

Betrachten Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt F des von v und w aufgespannten Parallelogramms gilt $F = |\det(v, w)|$.

Lösung:
Wir betrachten das entsprechende Koordinatensystem und definieren $v = (a, b)^T$ und $w = (c, d)^T$.



Dann können wir uns elementar geometrisch überlegen:

$$\begin{aligned}
F &= |w|d = |w||v|\sin(\varphi) = |v||w|\sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \\
&= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 - (ac)^2 - (bd)^2 - 2abcd} = \sqrt{(ad-bc)^2} = |ad - bc| \\
&= \left|\det\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right)\right| = |\det(v, w)|
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6

Invertieren Sie folgende Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Wir könnten hier den gewohnten Gauß-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen verwenden, aber ein effizienterer Weg ergibt sich, wenn wir die Matrix elementweise darstellen: $A_{ij} = 1-\delta_{ij}$. Wir vermuten, dass A^{-1} dieselbe Symmetrie zwischen Diagonal- und Nicht-Diagonalelementen aufweisen wird, also setzen wir $(A^{-1})_{ij} = q\delta_{ij}+f(1-\delta_{ij}) = f+(q-f)\delta_{ij}$, wobei q die Diagonalelemente und f die Nicht-Diagonalelemente repräsentiert. Nun müssen wir dafür sorgen, dass die Inversionsbedingung $AA^{-1} = E$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}(AA^{-1})_{ij} &= \sum_{k=1}^{4} A_{ik}(A^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^{4}(1-\delta_{ik})(f+(q-f)\delta_{kj}) = \sum_{k=1}^{4}(f+(q-f)\delta_{kj} - f\delta_{ik} - (q-f)\delta_{ik}\delta_{kj}) \\ &= 4f + (q-f) - f - (q-f)\delta_{ij} = 2f+q+(f-q)\delta_{ij} \\ &\overset{!}{=} \delta_{ij} = E_{ij}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} & & 2f+q=0 & \quad\Leftrightarrow\quad q=-2f & & \\ f-q=1 & \quad\Rightarrow\quad & f+2f=3f=1 & \quad\Leftrightarrow\quad f=\frac{1}{3} & \quad\Rightarrow\quad & q=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Damit sind die Elemente von A^{-1} bestimmt.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{\text{(III)}-2\text{(II)}}{\xrightarrow{\text{(I)}-2\text{(II)}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \underset{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(II)}}{\xrightarrow{\text{(I)}/2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\underset{\text{(I)}-\text{(III)}}{\xrightarrow{\text{(II)}-2\text{(III)}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{(I)}-\text{(II)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 1\\ 1/2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Sei $V = \mathbb{C}^n$, $n < \infty$. Betrachten Sie die durch $A \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{C})$ induzierte Sesquilinearform

$$b : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (v,w) \mapsto v^*Aw = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i}A_{ij}w_j.$$

Welche Bedingungen müssen für A gelten, damit b ein Skalarprodukt ist?

Lösung:
Zunächst muss b hermitesch sein.

$$v^*Aw = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\overline{v_i}w_j \overset{!}{=} \overline{w^*Av} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{A_{ij}\overline{w_i}v_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{A_{ji}}\overline{v_i}w_j$$

Also muss $A = A^*$ selbstadjungiert sein.

Nun muss b positiv definit sein.

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass selbstadjungierte Matrizen stets diagonalisierbar sind. Es existiert ferner eine Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_n\}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir zerlegen nun $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ in Basiskomponenten von A.

$$\begin{aligned} v^* A v &= \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} a_k^*\right] A \left[\sum_{m=1}^{n} v_m a_m\right] = \sum_{k,m=1}^{n} \overline{v_k} a_k^* \underbrace{A a_m}_{\lambda_m a_m} v_m = \sum_{k,m=1}^{n} \lambda_m \overline{v_k} \underbrace{a_k^* a_m}_{\delta_{km}} v_m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{v_k} v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{|v_k|^2}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$

Nachdem diese Ungleichung für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gelten muss, können wir daraus folgern, dass alle Eigenwerte von A $\lambda_k > 0$ positiv sein müssen.
Bemerkung: Matrizen und lineare Abbildungen, deren Eigenwerte strikt positiv sind, nennt man ebenfalls *positiv definit.*

Aufgabe 8

Gegeben seien der euklidische $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $x, y \in V \setminus \{0\}$ und der Abstand $d(t) = \|x - ty\|$, wobei die Norm durch das Skalarprodukt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ induziert wird.
Finden Sie t_0, bei dem d minimal wird, und geben Sie $d(t_0)$ explizit an.

Lösung:
Wir nutzen für diese Aufgabe $\mathrm{d}d^2/\mathrm{d}t = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d^2(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x - ty, x - ty\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|x\|^2 - 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2\right) = 2t\|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle \overset{t=t_0}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad t_0 = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$$

Damit ist der minimale Abstand gegeben durch

$$d(t_0) = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{2\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^4}\|y\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|y\|^2}}.$$

Aufgabe 9

Es sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf einem K-Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung.

$$\forall x, y \in V: \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(b) Zeigen Sie den Satz des Pythagoras.

$$\forall x, y \in V: \quad x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Zeigen Sie im Fall $K = \mathbb{R}$, dass auch die Umkehrung gilt:

$$\forall x, y \in V: \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Rightarrow \quad x \perp y$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

$\square$

(b) Sei $x \perp y$, dann gilt:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \underbrace{\langle x,y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x \rangle}_{=0} + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$\square$

Sei nun $K = \mathbb{R}$, dann gilt

$$\|x+y\|^2 = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle \overset{!}{=} \|x\|^2 + \left\|y^2\right\|$$
$$\Rightarrow \qquad \langle x,y \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \perp y$$

$\square$