Übungsblatt 3

Anmerkung: Aus organisatorischen Gründen wird das Kapitel Skalarprodukte schon in diesem Blatt behandelt.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+w \end{pmatrix}\right) = xyzw.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Matrix

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\det(M_n)$.
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion nach n.

Aufgabe 5

Betrachten Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt F des von v und w aufgespannten Parallelogramms gilt $F = |\det(v, w)|$.

Aufgabe 6

Invertieren Sie folgende Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Sei $V = \mathbb{C}^n$, $n < \infty$. Betrachten Sie die durch $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ induzierte Sesquilinearform

$$b : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (v, w) \mapsto v^* A w = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{v_i} A_{ij} w_j .$$

Welche Bedingungen müssen für A gelten, damit b ein Skalarprodukt ist?

Aufgabe 8

Gegeben seien der euklidische $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $x, y \in V \setminus \{0\}$ und der Abstand $d(t) = \|x - ty\|$, wobei die Norm durch das Skalarprodukt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ induziert wird.
Finden Sie t_0, bei dem d minimal wird, und geben Sie $d(t_0)$ explizit an.

Aufgabe 9

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem K-Vektorraum V.

(a) Zeigen Sie die Parallelogrammgleichung.

$$\forall x, y \in V : \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(b) Zeigen Sie den Satz des Pythagoras.

$$\forall x, y \in V : \quad x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Zeigen Sie im Fall $K = \mathbb{R}$, dass auch die Umkehrung gilt:

$$\forall x, y \in V : \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Rightarrow \quad x \perp y$$