Übungsblatt 2

Aufgabe 1

(a) Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung des endlichdimensionalen Vektorraums V und $v \in V$ so, dass für eine natürliche Zahl n gilt: $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Beweisen Sie, dass dann $v, f(v), \dots, f^n(v)$ lineare unabhängig sind.

(b) Es sei V ein endl. dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei nun $f^n = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f^{\dim(V)} = 0$$

Aufgabe 2

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Homomorphismus $\phi : V \to V$ mit $\mathrm{im}(\phi)= \ker(\phi)$ gibt, wenn n gerade ist.

(b) Zeigen Sie: ist $\phi : V \to V$ ein Homomorphismus eines Vektorraums V mit $\phi^2 = \phi$, so ist $\mathrm{im}(\phi)+ \ker(\phi) = V$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen, wenn V Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung ist.

(a) $\ker(\phi) \cap \mathrm{im}(\phi) = \{0\}$

(b) $\ker(\phi^2) = \ker(\phi)$

Aufgabe 4

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie

(a) Für jeden Unterraum $U \subset V$ gilt $f^{-1}f(U) = U + \ker(f)$.

(b) Für jeden Unterraum $U' \subset W$ gilt $f(f^{-1}(U')) = U' \cap \mathrm{im}(f)$.

Aufgabe 5

Sei für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis wie folgt gegeben

$$D_E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$.

(b) Sei nun $b_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 \in \mathbb{R}^3$, $b_2 = 4e_1 + 5e_2 + 6e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Ergaenzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ und ermitteln Sie Basiswechselmatrizen $S_{B,E}, S_{E,B}$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f, $D_B(f)$ bezüglich ihrer gewählten Basis B.

Aufgabe 6

Es seien K ein Körper und $A \in K^n$. Zeigen Sie:

(a) Fas $A^2 = A$ ist und A invertierbar, so ist $A = I_n$.

(b) Falls $A^2 = 0$, so ist $A + I_n$ invertierbar.

(c) Falls $A^2 - 2A + I_n = 0$, so ist A invertierbar.

Aufgabe 7

Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $A = I_n + uv^T$. Finden Sie im invertierbaren Fall für A ihre Inverse, A^{-1} (Überlegen Sie sich hierfür, worauf ein Vektor x abgebildet wird!). (*Zusatz*: Wie lautet dann $\det(A)$?)

Aufgabe 8

Bestimmen sie bezüglich einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

(a) Eine Matrix $D_{i,\lambda}$, sodass $D_{i,\lambda}A$ gleich der Matrix A ist, dessen $i-$te Zeile um den Faktor λ multipliziert wurde.

(b) Eine Matrix $E_{i,j}$, sodass $E_{i,j}A$ gleich der Matrix A ist, dessen $i-$te Zeile zur $j-$ten Zeile aufaddiert wurde.

(c) Ein Matrix $F_{i,j}$, sodass $F_{i,j}A$ gleich der Matrix A ist, dessen $i-$te und $j-$te Zeile vertauscht wurden.

Aufgabe 9

Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Finden Sie bzgl. der Standardbasis die allgemeine Form der Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung f_v, welche folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\forall w \in \mathbb{R}^3 : w^T f_v(w) = v^T f_v(w) = 0$$