Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei (G,·) eine Gruppe. Zeige: Gilt $g_1 g_2 g_1 g_2 = 1$ für alle g_1, $g_2 \in G$, so ist $g = g^{-1}$ für alle $g \in G$.

Aufgabe 2

Sei $(G,*)$ eine Gruppe und sei h ein Element von G. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{g \in G | g * h = h * g\}$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

Aufgabe 3

(a) Sei $\sigma := (i_1, ..., i_r) \in S_n$ ein Zykel der Länge r. Zeigen Sie, dass σ ein Produkt von $r-1$ Transpositionen (also $(l_1, j_1)...(l_{r-1}, j_{r-1})$) ist und bestimmen sie das Vorzeichen $\mathrm{sgn}(i_1, ..., i_r)$.

(b) Beweisen Sie, dass sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ eindeutig als Produkt von Zykeln schreiben lässt, so dass jedes $i \in \{1, ..., n\}$ hochstens in einem Zykel vorkommt. (*Hinweis:* Induktion nach $n \geq 2$)

(c) Sei folgende Permutaion gegeben

$$\sigma = (3, 5, 2, 1)(4, 6)$$

Bestimmen Sie σ in Tabellenschreibweise, und berechnen Sie $\sigma^{-1}, \sigma^{2021}$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Menge

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass G zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist. Ist diese Kommutativ?

(b) Bestimmen Sie alle $Z \in G$ mit der Eigenschaft

$$Z \cdot M = M \cdot Z \quad \forall M \in G$$

Aufgabe 5

Sei q eine natürliche Zahl, sodass $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$ ist und definiere

$$\mathbb{Q}[\sqrt{q}] := \{a + b\sqrt{q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Zeigen Sie, dass die oben definierte Menge einen Unterkörper von $\mathbb{R}$ darstellt. Verifizieren Sie also, dass die Körpereigenschaften eingeschränkt auf die obere Menge mit den üblichen Verknüpfungen + und · gelten.

Aufgabe 6

Betrachten Sie den Vektorraum V der reellen stetigen Funktionen auf dem Intervall $(0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen in der Menge

$$\{1, 1/x, 1x^2, \ldots 1/x^n\}$$

eine linear unabhängig sind.

Aufgabe 7

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $B \subset V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind

(a) B ist eine Basis von V.

(b) B ist maximal linear unabhängig.

(c) B ist minimal erzeugend.

Aufgabe 8

Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^5$ die von den Vektoren $(1,1,1,0,1)^T, (2,1,0,0,1)^T, (0,0,1,0,0)^T \in \mathbb{R}^5$, bzw. $(1,1,0,0,1)^T, (3,2,0,0,2)^T, (0,1,1,1,1)^T \in \mathbb{R}^5$ aufgespannten Unterräume.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$.

(b) Berechnen Sie die Dimension und eine Basis von $U + V$

Aufgabe 9

Es seien V ein reeller Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $x_1, \ldots x_n \in V$ paarweise verschiedene Vektoren.

(a) Beweisen Sie, dass die Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{x_i + x_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ denselben Untervektorraum von V erzeugen.

(b) Erzeugen die Mengen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{x_i - x_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ denselben Untervektorraum von V? (Beweis oder Gegenbeispiel!)