Ferienkurs Experimentalphysik 2

Übungsblatt 4: Lösung

Tutoren: Julien Kollmann und Gloria Isbrandt

6 Elektromagnetische Welle

6.1 Allgemeine Wellengleichung

Geben Sie die Form des elektrischen und magnetischen Anteils einer allgemeinen Elektromagnetischen Welle an. Erklären Sie die vorkommenden Variablen und den Zusammenhang der beiden Teile.
Geben Sie anschließend eine explizite Form für $\vec{E}(t, \vec{x})$ an. Es sei gegeben, dass sich die elektromagnetische Welle in die x-Richtung ausbreitet und der magnetische Anteil in der x,y-Ebene Schwingt. Des weiteren sei $\vec{E}(0, 0) = 0$.

Lösung

Die allgemeine Form der elektromagnetischen Welle ist:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + \vec{E}_0^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$$

$\vec{k}$ ist der Wellenvektor; er zeigt im Vakuum in die Ausbreitungsrichtung der Welle. $\vec{E}_0$ ist die Amplitude der Welle und zeigt in die Schwingungsrichtung der Welle. Es gilt außerdem $|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|$.

Die gesuchte el.mag. Welle breitet sich in die x-Richtung aus. D.h.

$$\vec{k} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der magnetische Anteil der Welle schwingt in der x,y-Ebene somit ist die Amplitude

$$\vec{B}_0 = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der elektrische Anteil der Welle kann nun bestimmt werden. Er steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (x-Achse) und zur magetischen Welle (y-Richtung). Es kann wegen der Randbedingung ein Sinus als Ansatz für die Welle gewählt werden.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \qquad , \qquad \vec{E}_0 = c \cdot B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Poyntig Vektor und Polarisation

Zeigen Sie, dass für eine zirkular polarisierte Welle der Poynting Vektor zeitunabhängig ist.
(*Hinweis:* Nehme o.b.d.A. an, dass sich die Welle in z-Richtung ausbreite.)

Lösung

Für eine zirkular polarisierte Welle, welche sich in z-Richtung ausbreitet gilt:

$$\vec{E} = E_0(\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - \vec{e}_y \sin(kz - \omega t))$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{E_0}{c}(\vec{e}_z \times (\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - \vec{e}_y \sin(kz - \omega t))$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c}(\vec{e}_y \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)).$$

Der Poynting-Vektor kann so direkt bestimmt werden:

$$\vec{S} = \epsilon_c^2(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{E_0^2 \epsilon_0 c^2}{c} \cdot ((\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - \vec{e}_y \sin(kz - \omega t) \times (\vec{e}_y \cos(kz - \omega t) + \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)))$$

$$= \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z(\cos^2(kz - \omega t) - (-)\sin^2(kz - \omega t)) = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z$$

7 Relativitätstheorie

7.1 Gleichzeitigkeit von Ereignissen

Betrachte in der zweidimensionalen Raum-Zeit (eine Raum- und eine Zeit-Dimension) zwei Ereignisse A$(0,72\mu s;\, 1,5km)$ und B$(0,95\mu s;\, 1,7km)$ gemessen in einem Inertialsystem S. In einem zweiten Inertialsystem S' erscheinen die zwei Ereignisse gleichzeitig. Bestimme die Relativgeschwindigkeit des zweiten Systems S' relativ zum ersten S.
Zeichne außerdem ein Minkowsi-Diagram und trage alle relevanten Daten ein.

Lösung

Wegen der Invarianz des Raumzeit Intervalls und unter Berücksichtigung, dass im System S' die beiden Ereignisse gleichzeitig sind ($\Delta t' = 0$) folgt:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \Rightarrow (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = -(\Delta x')^2 \Rightarrow (\Delta x')^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$$

Mit der Lorentz-Trafo

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

erhält man die Geschwindigkeit von S' relativ zu S:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' - v\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad mit \quad \Delta t' = 0 \qquad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta x')^2}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 - [(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2]}}{\Delta x} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c\beta = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \frac{(3\cdot 10^8)^2 \cdot (0,95\cdot 10^{-6} - 0,72\cdot 10^{-6})}{(1,7\cdot 10^3 - 1,5\cdot 10^3)} = 10^8 m/s$$

7.2 Längenkontraktion

Ein Beobachter reist an einem starren liegenden Pfosten vorbei, welcher eine Ruhelänge von $l = 1,0m$ hat.

a) Der Beobachter habe eine Geschwindigkeit von $v_1 = 0,7c$. Bestimmen Sie die Länge des Pfahles, welcher der Beobachter misst.

b) Der Beobachter habe nun eine Geschwindigkeit von $v_2 = 300m/s$ (Schallgeschwindigkeit). Wie lang ist der Pfahl nun für den Beobachter?

Lösung

a) Die Ruhelänge oder Eigenlänge des Körpers ist l. Für den Bewegten Beobachter erscheint der Pfahl also kleiner: mit Länge l'.

$$l' = \frac{l}{\gamma} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{1-(0,7)^2} = 0,71m$$

b) Die Aufgabe wird analog zu a) gelöst. Das Verhältnis von $\frac{v}{c} = \frac{330}{3\cdot 10^8} = 1,1\cdot 10^{-6}$, deswegen ist die vom Beobachter gemessene Länge

$$l' = l \cdot \sqrt{1-(1,1\cdot 10^{-6})} = 0,999m.$$

Obwohl sich der Beobachter also mit Schallgeschwindigkeit bewegt, ist die Längenkontraktion vernachlässigbar klein.

7.3 Zeitdilatation

Ein Pendel wird zu Schwingen angeregt. In seinem Ruhesystem, der Erde, kann die Schwingungsperiode von $T = 2,5s$ gemessen werden.

a) Du sitzt in einem Flugzeug welches mit einer Geschwindigkeit von $v = 1000km/h$ fliegt. Du siehst das Pendel auf der Erde stehen und bestimmst seine Schwingungsperiode T'. Was misst du?

b) Du wurdest nach einigen Jahren zum Astronaut ausgebildet und fliegt in einer Rakete mit $v = 2/3c$ an der Erde vorbei. Du erkennst das selbe Pendel auf der Erde wieder. Um wieviel weicht nun deine Messung der Periode von der ersten Messung ab?

Lösung

a) Die Eigenzeit des Pendels ist jene, welche im Ruhesystem gemessen wird: auf der Erde.

$$T' = T \cdot \gamma = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{v}{c} = 9,0 \cdot 10^{-7} \qquad \Rightarrow \qquad T' = \frac{2,5s}{\sqrt{1 - (9,0 \cdot 10^{-7})^2}} \approx 2,5s.$$

Du wirst also im Flugzeug keine merkliche Veränderung der Periode messen.

b) Analog zu a) kann die gemessene Schwingungsperiode im Raumschiff bestimmt werden:

$$T'' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2,5s}{\sqrt{1 - (\frac{2}{3})}} = 3,35s.$$

Die Messung in der Rakete weicht um $0,85s$ von der ersten Messung ab.

7.4 Addition von Geschwindigkeiten

Ein Inertialsystem S' bewege sich mit einer Geschwindigkeit $+0,9c$ relativ zu einem anderen Inertialsystem S. Dabei bewege sich S' nach rechts, relativ zu S. Im System S' wird nun ein Lichtimpuls nach links ausgesandt. Welche Geschwindigkeit hat das Lichtsignal im System S? Bestimmen Sie diese rechnerisch sei es mit der klassischen Gallilei-Transformation, als auch relativistisch.

Lösung

Gegeben ist $v = 0,9c$, die Geschwindigkeit des Inertialsystems S' bezüglich des ruhenden Systems S und $u' = -c$, die Impulsgeschwindigkeit im System S'.
Mit den Klassischen Gallilei-Transformationen erhält man:

$$u = u' + v$$

$$u = -c + 0,9c = -0,1c$$

Die relativistische Bestimmung der Relativgeschwindigkeiten besagt:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$u = \frac{-c + 0,9c}{1 - \frac{0,9c^2}{c^2}} = \frac{-0,1c}{0,1} = -c,$$

wie man es für einen Lichtimpuls erwartet.