Ferienkurs Experimentalphysik 2

Übungsblatt 1: Lösung

Tutoren: Julien Kollmann und Gloria Isbrandt

1 Aufgaben zur Elektrostatik

1.1 Coulomb I

Für die folgenden Verteilungen punktförmiger Ladungen ist die potentielle Energie, d. h. die Energie, die man aufbringen muss, um die Ladungen aus unendlicher Entfernung in die gezeigte Konfiguration zu bringen, zu berechnen:

- Drei gleiche Ladungen Q als Eckpunkte eine gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a)
- Zwei gleiche Ladungen Q und eine dritte gegengleiche Ladung $-Q$ als Eckpunkte eine gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a)
- Zwei gleiche Ladungen Q und zwei dazu gegengleiche Ladungen $-Q$ als Eckpunkte eines Quadrats (Seitenlänge a)

Die Konfigurationen sind nicht alle eindeutig zu zeichnen. Verändert sich die potentielle Energie unter Vertauschung zweier Ladungen aus einer Konfiguration (also Verwendung einer anderen zur Beschreibung passenden Konfiguration)?

Lösung

- $E_{pot} = +3\frac{Q^2k}{a}$
- $E_{pot} = (1-2)\frac{Q^2k}{a}$
- $E_{pot} = (-4+\sqrt{2})\frac{Q^2k}{a}$ für gleiche Ladungen als gegenüberliegende Eckpunkte

Die potentielle Energie verändert sich nur beim letzten Beispiel, da die potentielle Energie neben dem Abstand hier nur vom Vorzeichen der Ladungen abhängt.

1.2 Coulomb II

Ein Proton wird von sehr weit weg auf einen Blei-Kern geschossen. Welche Anfangsgeschwindigkeit hat das Proton, wenn die kürzeste Entfernung vom Kern 10 fm beträgt? Rechnen Sie nicht-relativistisch.

Lösung

Diese Aufgabe kann mithilfe der Energieerhaltung gelöst werden: im Unendlichen besitzt das Photon nur kinetische Energie, am Umkehrpunkt hingegen keine. Mit der elektrostatischen Energie verhält es sich andersherum.

$$E(\infty) = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2 \tag{1}$$

$$E(10\,\mathrm{fm}) = k \frac{82e \cdot e}{10\,\mathrm{fm}} \tag{2}$$

$$\text{Daraus folgt} \quad v = \sqrt{\frac{2k \cdot 82e^2}{m_p \cdot 10\,\mathrm{fm}}} \approx 4.8 \times 10^7\,\mathrm{m/s} \tag{3}$$

1.3 Gauß I

Eine leitende Kugel mit Radius $R/2$ sei von einer sehr dünnen, leitenden, kugelförmigen Hülle mit Radius R umgeben. Die Kugel trage die Ladung Q_0, die Hülle $-Q_0$. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(r)$ im ganzen Raum und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung

Aufgrund der Symmetrie des Problems kann das E-Feld nur vom Abstand des Ursprungs (Mittelpunkt der Kugel) abhängen und hat die Form $\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e_r}$. Die Ladung der leitenden Kugel ist gleichförmig auf ihrer Oberfläche erteilt.

$$0 < r < R/2: \quad \oint \vec{E}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} = 0 \tag{4}$$

$$R/2 < r < R: \quad \oint \vec{E}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$R < r: \quad \oint \vec{E}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{innen}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0 - Q_0}{\varepsilon_0} = 0 \tag{6}$$

Das E-Feld ist an allen Stellen orthogonal zur Oberfläche einer Kugel um den Mittelpunkt. Daraus erhalten wir für den relevanten Bereich zwischen $R/2$ und R:

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ_0}{r^2} \cdot \vec{e_r}\,. \tag{7}$$

Außerhalb dieses Bereichs ist das Feld gleich null. Skizze siehe Video.

1.4 Gauß II

Eine Kugelfömige Ladungsverteilung $\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$ sei gegeben durch $\rho = \rho_0 \cdot (1 - \frac{r^2}{a^2})$ für $r \leq a$ und $\rho = 0$ für $r > a$. Berechnen Sie die Ladung der Kugel, sowie das elektrische Feld $\vec{E}$ und das zugehörige Potential Φ im ganzen Raum.

Lösung

LADUNG: Per Definition gilt $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$. Daher:

$$Q = \int \mathrm{d}q = \int \rho\,\mathrm{d}V = \int_0^a \rho_0 (1 - \frac{r^2}{a^2})\,\mathrm{d}V = \frac{8\pi\rho_0}{15} a^3\,. \tag{8}$$

Die Integration wird im Video ausführlich gezeigt; bei der Berechnung sollte insbesondere auch auf die Korrekturfaktoren in Kugelkoordinaten geachtet werden.

Außerhalb der Kugel: Unter Verwendung des Gauß'schen Satzes lässt sich schnell zeigen, dass das $\vec{E}$-Feld außerhalb der Kugel dem einer Punktladung entspricht:

$$\vec{E}_{aussen} = \frac{kQ}{r^2}\vec{e_r}\,. \tag{9}$$

Wir wenden die Definition des Potentials an: $\Phi(r) - \Phi(ref) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, und legen den Nullpunkt des Potential im Unendlichen fest.

$$\Phi_{aussen}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \frac{kQ}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{kQ}{r}\,. \tag{10}$$

Innerhalb der Kugel: Im Innern der Kugel erhalten wir mit Satz von Gauß

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q\prime}{\varepsilon_0}\,. \tag{11}$$

Unter Verwendung der Integration aus dem ersten Aufgabenteil erhalten wir für die eingeschlossene Ladung $Q\prime(r) = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = 4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$. Wendet man nun den Satz von Gauß an ergibt sich

$$\vec{E}_{innen} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3r^2}{5a^2}\right) \cdot \vec{e_r}\,. \tag{12}$$

Bei der Bestimmung des Potentials im Innern muss beachtet werden, dass das E-Feld in $r = a$ endlich sein muss. Φ muss hier also stetig sein.

$$\Phi_{innen}(r) - \Phi_{innen}(a) = \Phi_{innen}(r) - \Phi_{aussen}(a) = -\int_a^r \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{13}$$

$$\Phi_{innen}(r) = \Phi_{aussen} + \int_r^a \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3r^2}{5a^2}\right)\mathrm{d}r \tag{14}$$

$$\Phi_{innen}(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(a^2 + r^2\left(\frac{r^2}{5a^2} - \frac{2}{3}\right)\right) \tag{15}$$

1.5 Kondensator I

Zwischen den Platten eines Kondensators (mit den Ladungen Q und $-Q$, Abstand d und Fläche A) sei ein Teilchen mit Ladung q Masse m auf der Höhe $d/2$. Die Eigenschaften des Teilchens seien so gewählt, dass sich Gravitations- und elektrostatische Kraft aufheben.

- Sei die obere Platte die positiv geladene. Welches Vorzeichen hat die Ladung q?
- Bestimmen Sie q in Abhängigkeit der gegebenen Parameter.
- Zeichnen Sie das elektrische Potential des Teilchens als Funktion des Abstands y. Gehen Sie davon aus, dass $y = 0$ die untere Platte beschreibt und $y = d$ die obere. Wie unterscheidet sich diese Kurve von der des elektrischen Potentials zwischen den Platten?
- Zeichnen Sie das gesamte Potential des Teilchens als Funktion von y wie im vorhergehenden Aufgabenteil beschrieben. Überlegen Sie sich hierzu zunächst wie das durch die Gravitation verursachte Potential dargestellt werden kann.

Randeffekte sollen hier vernachlässigt werden.

Lösung

Um der (nach unten wirkenden) Gravitationskraft widerstehen zu können, muss das Teilchen zur oberen Platte gezogen werden. Die Ladung q ist also kleiner null. Aus dem Kräftegleichgewicht $F_G = F_E$ folgt $q = -\frac{mgA\varepsilon_0}{Q}$ unter Verwendung der Identität $E = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$. Die erste gefragte Kurve verbindet linear den Ursprung mit $y(d) = -Ed$. Das ist das Negative des elektrischen Potentials zwischen den Platten. Das Gravitationspotential verbindet ebenfalls linear den Ursprung mit $g(d) = Ed$ und ist somit das Negative der ersten Kurve. Die Summe der beiden Kurven (gesamte potentielle Energie des Teilchens) ist somit im ganzen Kondensator konstant null.

1.6 Kondensator II

Wir betrachten wieder einen Kondensator mit Abstand d, Ladung Q (und $-Q$) und Fläche A.

- Wie viel Energie ist im Kondensator gespeichert?
- Die Platten werden nun auseinander bewegt und der Abstand verdoppelt. Wie viel Arbeit muss aufgewendet werden? Zeigen Sie, dass diese gleich der Änderung des Potentials zwischen den Platten ist.
- Nun werde ein Dielektrikum $\varepsilon_r = 8$ zwischen die Platten geführt. Wie verändert sich die im Kondensator gespeicherte Energie? Verletzt dies die Energieerhaltung?

Lösung

- Die Energie beträgt $E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$
- $\Delta E = E(2d) - E(d) = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A} - \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$. Dies ist äquivalent zur Bewegung der positiv geladenen Platte um d im Feld der negativ geladenen Platte: $\Delta E = -QE_- d = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$ mit dem Feld der negativ geladenen Platte $E_- = \frac{-Q}{2A\varepsilon_0}$
- $\Delta E = E(\varepsilon_r = 8) - E(\varepsilon_r = 1) = -\frac{7}{8}E(\varepsilon_r = 1)$. Dies entspricht der Energie, die das Feld am Dielektrikum verrichtet; Energieerhaltung ist somit natürlich erhalten.

1.7 Kondensator III – mit Dipol

Die beiden Platten eines Plattenkondensators (Plattenabstand $d = 1\,\text{cm}$, Spannung $U = 5\,\text{kV}$ zwischen den Platten) haben die Fläche $A = 0.1\,\text{m}^2$.

- Wie groß sind Kapazität, Ladung auf den Platten und elektrische Feldstärke?
- Man leite her, dass die Feldenergie $W = \frac{1}{2}CU^2$ ist.
- Im Feld des Kondensators sei ein atomarer Dipol ($q = e$, Ladungsabstand $d = 5 \times 10^{-11}\,\text{m}$). Wie groß ist das Drehmoment, das auf den Dipol wirkt, wenn die Dipolachse parallel zu den Platten steht? Welche Energie gewinnt man bzw. muss man aufwenden, wenn die Dipolachse in bzw. antiparallel zur Feldrichtung gestellt wird?

Lösung

- Mithilfe der Standardformeln:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 88.5\,\mathrm{pF} \tag{16}$$
$$Q = CU = 4.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{C} \tag{17}$$
$$E = \frac{U}{d} = 5 \times 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \tag{18}$$

- Entlädt man den Kondensator, der auf die Spannung U_0 aufgeladen war, über einen Widerstand R, so muss die gesamte im Kondensator gespeicherte Energie W in Joule'sche Wärme im Widerstand R übergehen. Man erhält daher:

$$W = \int_0^\infty I^2 R \cdot \mathrm{d}t\,. \tag{19}$$

  Mit $I = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ erhält man über Integration das richtige Ergebnis.

- Wegen dem Winkel $\alpha = \pi/2$ zwischen Dipol und Feldinien gilt wegen $\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$ der Zusammenhang $D = pE = 4 \times 10^{-24}\,\mathrm{Nm}$. Es gilt also $W_{pot} = D = pE = 4 \times 10^{-24}\,\mathrm{Nm}$.