Theoretische Elektrodynamik

Klausurvorbereitende Aufgaben

von Leo Maximov & Annika Schott

29.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Greensche Funktionen

1.1.1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Bei einem gedämpften harmonischen Oszillator mit Masse m, Dämpfungskonstante γ, Eigenkreisfrequenz ω_0 und äußerer Kraft $F(t)$ lautet die Bewegungsgleichung für den Ort $x(t)$ bekanntlich

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

also

$$\mathrm{D}x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

mit dem Differenzialoperator

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2$$

a) Zeige, dass

$$G\left(t - t'\right) = \Theta\left(t - t'\right)\mathrm{e}^{-\gamma\left(t-t'\right)}\frac{\sin\left(\omega\left(t - t'\right)\right)}{\omega}$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ eine Green'sche Funktion zu diesem Differenzialoperator ist.

b)Berechne damit $x(t)$ für $F(t) = F_0\Theta(t)$. Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung darf dabei ignoriert werden. Interpretiere das Ergebnis physikalisch.

Lösung: a) Zunächst schreiben wir zur Abkürzung $\tau = t - t'$ und benutzen, dass $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$ ist. Es ist also zu zeigen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \omega_0^2\right)\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} = \delta(\tau)$$

Das beweisen wir durch stures Nachrechnen. Erst mal die erste Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} =& \delta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} - \gamma\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\\ &+ \Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\cos(\omega\tau)\end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet, da $\delta(\tau)\sin(\omega\tau) = \delta(\tau)\sin(\omega\cdot 0) = 0$ ist. Es bleibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} = \Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\left(-\gamma\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} + \cos(\omega\tau)\right)$$

Für die zweite Ableitung folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} =& \delta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\left(-\gamma\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} + \cos(\omega\tau)\right)\\ &- \gamma\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\left(-\gamma\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} + \cos(\omega\tau)\right)\\ &+ \Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}(-\gamma\cos(\omega\tau) - \omega\sin(\omega\tau))\end{aligned}$$

Im ersten Summanden bleit wieder wegen $\delta(\tau)f(\tau) = \delta(\tau)f(0))$ nur $\delta(\tau)$ übrig. Den zweiten und dritten fasst man zusammen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} =& \delta(\tau) + \Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\\ &\cdot\left(\gamma^2\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} - 2\gamma\cos(\omega\tau) - \omega\sin(\omega\tau)\right)\end{aligned}$$

Setzt man die Ableitungen in die Differenzialgleichung ein, so bleibt nach Zusammenfassen zunächst

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}+\omega_0^2\right)\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} =&\delta(\tau)+\Theta(\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\\ &\cdot\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\left(-\gamma^2-\omega^2+\omega_0^2\right)\end{aligned}$$

übrig. Mit $\omega^2=\omega_0^2-\gamma^2$ verschwindet der Ausdruck in der hinteren Klammer, und es bleibt rechts nur die Delta-Funktion übrig. Dies war zu zeigen.

b) Die allgemeine Lösung ist

$$x(t)=\int G\left(t-t'\right)\frac{F\left(t'\right)}{m}\mathrm{d}t'$$

(plus evtl. eine homogene Lösung), mit der gegebenen Kraft und der Green'schen Funktion von oben also

$$x(t)=\frac{F_0}{m}\int\Theta\left(t'\right)\Theta\left(t-t'\right)\mathrm{e}^{-\gamma\left(t-t'\right)}\frac{\sin\left(\omega\left(t-t'\right)\right)}{\omega}\mathrm{d}t'$$

Das Produkt der beiden Theta-Funktionen sorgt dafür, dass man nur Beiträge zum Integral erhält, wenn gleichzeitig $t'>0$ und $t'<t$ ist. Für $t>0$ hat man also die Einschränkung $0<t<t'$ für das Integral. Für $t<0$ können dagegen beide Ungleichungen gleichzeitg nicht erfüllt sein, und das Intgral liefert keinen Beitrag; es gilt also $x(t)=0$ für $t<0$. Das können wir wieder mit einer Theta-Funktion ausdrücken:

$$x(t)=\frac{F_0}{m}\Theta(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-\gamma\left(t-t'\right)}\frac{\sin\left(\omega\left(t-t'\right)\right)}{\omega}\mathrm{d}t'$$

Mithilfe zweimaliger partieller Integration (wobei die Substitution $\tau=t-t'$ hilfreich sein kann) und ein wenig zusätzlicher Rechnerei erhält man daraus

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\Theta(t)\left(-\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}-\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t)+1\right)$$

Wie man leicht nachprüft, ergibt diese Lösung physikalisch Sinn: Einerseits folgt $x(0)=0$ und $v(0)=\dot{x}(0)=0$; zu Beginn ist der Oszillator im Ursprung in Ruhe. Andererseits bleibt für $t\to\infty$ nur $x(t)=\frac{F_0}{m\omega^2}$: Die Schwingung ist für große Zeiten abgeklungen und der Oszillator nimmt die neue Ruhelage ein, die durch die äußere Kraft vorgegeben wird.

2 Elektrostatik

2.1 Multipolentwicklung

2.1.1 Multipolmomente

Die sphärischen Multipolmomente sind definiert durch

$$q_{lm}=\int\mathrm{d}^3x\rho(\vec{x})r^lY^*_{lm}(\theta,\varphi)$$

Berechnen Sie all Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{x})=\frac{e}{64\pi a^3}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{e}^{-r/a}\sin^2\theta$$

Lösung: Zunächst fällt auf, dass die Ladungsverteilung nicht von ϕ abhängt. Bei der Berechnung der Multipolmomente tritt daher das Integral

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{e}^{im\varphi}=2\pi\delta_{m0}$$

auf. Alle Multipolmomente q_{lm} mit $m \neq 0$ verschwinden also. Weiter ist

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{2}{3}\left(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)\right)$$

Da die Legendre-Polynome die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

erfüllen, können nur die beiden Multipolmomente q_{00} und q_{20} von Null verschieden sein. Der allgemeine Ausdruck für q_{lm} wird

$$q_{lm} = 2\pi\delta_{m0}\int \mathrm{d}r r^{l+2} \cdot \frac{e}{64\pi a^3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \mathrm{e}^{-r/a}\int \mathrm{d}\cos\theta \frac{2}{3}\left(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta)\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

$$\overset{x=r/a}{=} \frac{ea^l\delta_{m0}}{24}\left(\delta_{l0} - \frac{\delta_{l2}}{5}\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int \mathrm{d}x x^{l+4}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= \frac{ea^l\delta_{m0}}{24}\left(\delta_{l0} - \frac{\delta_{l2}}{5}\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}(l+4)!$$

Speziell ergibt sich

$$q_{00} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}}, \quad q_{20} = -ea^2\sqrt{\frac{45}{\pi}}$$

2.1.2 Multipolentwicklung: Quader

Zeige: Die Kanten eines Würfels haben die Länge $2a$ und verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen. Sein Mittelpunkt ist (1) der Ursprung, (2) der Punkt (a, a, a). Der Würfel ist homogen geladen mit Ladungsdichte ρ_0.
(a) Berechne jeweils die Gesamtladung, das Dipolmoment und das Quadrupolmo- ment.
(b) Ermittle allgemein, wie man die Gesamtladung, das Dipolmoment und das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung, die in zwei verschiedenen, gegeneinander um den Vektor d verschobenen Koordinatensystemen berechnet wurden, ineinander umrechnen kann, und überprüfe deine Formeln, indem du die Ergebnisse von (1) und (2) ineinander umrechnest.
(c) Zeige: Verschwindet die Gesamtladung, so ist das Dipolmoment unabhängig von der Verschiebung; verschwinden Gesamtladung und Dipolmoment, so ist das Quadrupolmoment unabhängig von der Verschiebung.
Lösung: a) (1) Die Gesamtladung ist

$$q = \int \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z = \rho_0 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3\rho_0$$

wie sich natürlich auch direkt aus $q = \rho_0 V$ ergibt. Die x-Komponente des Dipolmoments ist

$$p_1 = \int \rho_0 x \mathrm{d}V = \rho_0\int_{-a}^{a} x\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z = \rho_0 \cdot 0 \cdot 2a \cdot 2a = 0$$

ebenso ergibt sich auch $p_2 = p_3 = 0$. Das Dipolmoment verschwindet hier also. Ähnlich wie beim Dipolmoment zeigt man, dass die Nicht Diagonalelemente des Quadropolmoments verschwinden. Weiter:

$$\int \rho_0 x^2 \mathrm{d}V = \rho_0\int_{-a}^{a} x^2\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z = \rho_0 \cdot \frac{2}{3}a^3 \cdot 2a \cdot 2a = \frac{qa^2}{3}$$

dasselbe Ergebnis erhält man jeweils für die Integrale über y^2 und über z^2. Damit folgt sofort

$$Q_{11} = \int \rho(r)\left(2x^2 - y^2 - z^2\right)\mathrm{d}V = 0$$

und ebenso $Q_{22} = Q_{33} = 0$ - auch das Quadrupolmoment verschwindet hier also.
(2) Die Gesamtladung ist

$$q = \int \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0 \int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_0^{2a} \mathrm{d}y \int_0^{2a} \mathrm{d}z = \rho_0 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = 8a^3\rho_0$$

wie sich natürlich auch wieder direkt aus $q = \rho_0 V$ ergibt. Die x-Komponente des Dipolmoments ist nun

$$p_1 = \int \rho_0 x \mathrm{d}V = \rho_0 \int_0^{2a} x\mathrm{d}x \int_0^{2a} \mathrm{d}y \int_0^{2a} \mathrm{d}z = \rho_0 \cdot 2a^2 \cdot 2a \cdot 2a = qa$$

ebenso ergibt sich auch $p_2 = p_3 = qa$. Die Nicht-Diagonalelemente des Quadrupolmoments verschwinden nun auch nicht mehr, z.B.

$$\int \rho_0 3xy \mathrm{d}V = 3\rho_0 \int_0^{2a} x\mathrm{d}x \int_0^{2a} y\mathrm{d}y \int_0^{2a} \mathrm{d}z = 3\rho_0 \cdot 2a^2 \cdot 2a^2 \cdot 2a = 3qa^2$$

dasselbe Ergebnis erhält man auch für alle anderen Nicht-Diagonalelemente. Außerdem ist

$$\int \rho_0 x^2 \mathrm{d}V = \rho_0 \int_0^{2a} x^2\mathrm{d}x \int_0^{2a} \mathrm{d}y \int_0^{2a} \mathrm{d}z = \rho_0 \cdot \frac{8}{3}a^3 \cdot 2a \cdot 2a = \frac{4}{3}qa^2$$

Die Integrale über y^2 und über z^2 liefern jeweils dasselbe Ergebnis. Damit folgt wieder, dass die Diagonalemente alle verschwinden.
b) Die Ergebnisse im einen Koordinatenstem seien q, p und Q, die im Koordinatensystem, das diesem gegenüber um d verschoben ist, seien q', p' und $\boldsymbol{Q}'$. Die Koordinaten heißen x, y und z bzw. $x' = x - d_x, y' = y - d_y$ $z' = z - d_z$. Für die infinitesimalen Volumenelemente in den Integralen gilt natürlich $\mathrm{d}V = \mathrm{d}V'$. Bei den Ladungsdichten müssen wir ein wenig vorsichtig sein: Im alten Koordinatensystem haben wir $\rho(\boldsymbol{r})$, im neuen $\rho'(\boldsymbol{r}')$ (nicht einfach $\rho(\boldsymbol{r}')$ – im verschobenen Koordinatensystem brauchen wir zur Beschreibung der Ladungsverteilung eine andere Funktion!). Dabei gilt $\rho'(\boldsymbol{r}') = \rho'(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \rho(\boldsymbol{r})$ Zunächst ist dann natürlich

$$q' = \int \rho'(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V' = \int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = q$$

die Gesamtladung ändert sich selbstverständlihc bei einer Verschiebung des Koordinatensystems nicht. Beim Dipolmoment ist dagegen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}' &= \int \rho'(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{r}'\mathrm{d}V' = \int \rho(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d})\mathrm{d}V \\
&= \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\mathrm{d}V - \boldsymbol{d}\int \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{d}
\end{aligned}$$

es ändert sich also um das Produkt aus Gesamtladung und Verschiebungvektor. Auch das Quadrupolmoment ändert sich:

$$\begin{aligned}
Q'_{ij} &= \int \rho'(\boldsymbol{r}') \left(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}\right) \mathrm{d}V' \\
&= \int \rho(\boldsymbol{r}) \left(3(x_i - d_i)(x_j - d_j) - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d})^2\delta_{ij}\right) \mathrm{d}V \\
&= \int \rho(\boldsymbol{r}) \left(3x_i x_j - r^2\boldsymbol{\delta}_{ij}\right) \mathrm{d}V \\
&\quad + \int \rho(\boldsymbol{r}) \left(-3d_i x_j - 3x_i d_j + 2(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{d})\delta_{ij}\right) \mathrm{d}V \\
&\quad + \int \rho(\boldsymbol{r}) \left(3d_i d_j - \boldsymbol{d}^2\delta_{ij}\right) \mathrm{d}V \\
&= Q_{ij} - \left(3d_i p_j + 3p_i d_j - 2(\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{d})\delta_{ij}\right) + q\left(3d_i d_j - \boldsymbol{d}^2\delta_{ij}\right)
\end{aligned}$$

Überprüfen wir die Ergebnisse aus (a). Das Koordinatensystem (1) ergibt sich aus (2) durch Verschiebung um den Vektor $\boldsymbol{d} = (a, a, a)^\top$, wir haben also $d_i = a$ für alle i. In Koordinatensystem (2) hatten wir berechnet: $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, $Q_{ij} = 3qa^2$ für $i \neq j$ und $Q_{ii} = 0$ für alle i. Damit folgt in (1):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{d} = q\boldsymbol{d} - q\boldsymbol{d} = 0 \\
Q'_{ij} &= Q_{ij} - (3d_i p_j + 3p_i d_j) + q\,(3d_i d_j) \\
&= 3qa^2 - \left(3qa^2 + 3qa^2\right) + q\left(3a^2\right) = 0 \quad (i \neq j) \\
Q'_{ii} &= Q_{ii} - (3d_i p_j + 3p_i d_j - 2(p \circ d)) + q\left(3d_i d_j - d^2\right) \\
&= 0 - \left(3qa^2 + 3qa^2 - 6qa^2\right) + q\left(3a^2 - 3a^2\right) = 0
\end{aligned}$$

in völliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen in (a).
c) Für Für $q = 0$ ist $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - 0 \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}$, für $q = 0$ und $\boldsymbol{p} = 0$ ist

$$Q'_{ij} = Q_{ij} - (3d_i \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot d_j - 2 \cdot (0 \circ \boldsymbol{d})\delta_{ij}) + 0 \cdot \left(3d_i d_j - \boldsymbol{d}^2 \delta_{ij}\right) = Q_{ij}$$

2.1.3 Multipolmomente: Pyramide

Eine homogene Ladungsverteilung habe die Form einer dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0)$ und $C(0;0;c)$. Ermitteln Sie die Multipolmomente dieser Ladungsverteilung bis einschließlich des Quadrupolmoments. Was ergibt sich spziell für $a = b = c$?
Hinweis: Die hier auftretenden Integrale können alle folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}V &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{b - \frac{b}{a}x} \mathrm{d}y \int_0^{c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y} \mathrm{d}z \\
&= abc \int_0^1 \mathrm{d}x' \int_0^{1-x'} \mathrm{d}y' \int_0^{1-x'-y'} \mathrm{d}z' \\
&= abc \int_0^1 \mathrm{d}y' \int_0^{1-y} \mathrm{d}z' \int_0^{1-z'-x'} \mathrm{d}x' \\
&= abc \int_0^1 \mathrm{d}z' \int_0^{1-z'} \mathrm{d}x' \int_0^{1-z'-x'} \mathrm{d}y'
\end{aligned}$$

wobei $x' = x/a, y' = y/b$ und $z' = z/c$ substituiert wurden und die letzten beiden Zusammenhänge aus Symmetriegründen gelten. Damit hat man zunächst für die Gesamtladung

$$\begin{aligned}
q &= abc \int_0^1 \mathrm{d}x' \int_0^{1-x'} \mathrm{d}y' \int_0^{1-x'-y'} \mathrm{d}z' \rho_0 \\
&= abc\rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}x' \int_0^{1-x'} \mathrm{d}y' \,(1 - x' - y') \\
&= abc\rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}x' \left((1 - x')\,(1 - x') - \frac{1}{2}\,(1 - x')^2\right) \\
&= abc\rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}x' \frac{1}{2}\,(1 - x')^2 = abc\rho_0 \cdot \frac{1}{6} = V\rho_0
\end{aligned}$$

wobei man das Volumen $V = abc/6$ der Pyramide auch elementargeometrisch berechnen kann. Die x-Komponente des Dipolmoments ist entsprechend

$$\begin{aligned}
p_1 &= abc \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x'} \mathrm{d}y^{1-x'-y'} \mathrm{d}z' a x' \rho_0 \\
&= \frac{a^2 bc\rho_0}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x' x' \,(1 - x')^2 = \frac{a^2 bc\rho_0}{24} = \frac{qa}{4}
\end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen folgt

$$p_2 = \frac{qb}{4}, \quad p_3 = \frac{qc}{4}$$

Für den Quadrupoltensor berechnen wir wieder erst

$$\int x^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \tfrac{qa^2}{10}$$
$$\int y^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \tfrac{qb^2}{10}$$
$$\int z^2\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \tfrac{qc^2}{10}$$

und damit

$$Q_{11} = \frac{q\left(2a^2 - b^2 - c^2\right)}{10}$$
$$Q_{22} = \frac{q\left(2b^2 - c^2 - a^2\right)}{10}$$
$$Q_{33} = \frac{q\left(2c^2 - a^2 - b^2\right)}{10}$$

Die Nicht-Diagonalelemente sind etwas aufwendiger zu berechnen, hier beispielhaft

$$\begin{aligned} Q_{12} =& 3a^2b^2c\rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}x'x' \int_0^{1-x'} \mathrm{d}y'y'\left(1-x'-y'\right) \\ =& 3a^2b^2c\rho_0 \int_0^1 \mathrm{d}x'x' \left[\left(1-x'\right)\frac{1}{2}\left(1-x'\right)^2 \right. \\ & \left. -\frac{1}{3}\left(1-x'\right)^3\right] \\ =& \frac{a^2b^2c\rho_0}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x'x'\left(1-x'\right)^3 \\ =& \frac{a^2b^2c\rho_0}{2}\cdot\frac{1}{20} = \frac{3qab}{20} \end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen

$$Q_{13} = \frac{3qac}{20}, \quad Q_{23} = \frac{3qbc}{20}$$

Für $a = b = c$ hat man speziell

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0$$
$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{3qa^2}{20}$$

Der Quadrupoltensor hat in diesem Fall also nur Komponenten außerhalb der Diagonalen.

2.1.4 Multipolmomente: Kreisscheibe

Bei einer Ladungsverteilung sei die Ladungsdichte nur ungleich null in einer Kreisscheibe mit Radius r_0 in der $x-y$-Ebene um den Ursprung. In dieser Kreisscheibe habe die Flächenladungsdichte den Wert σ_0. Ermitteln Sie die sphärischen Multipolmomente dieser Ladungsverteilung.
Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen bzw. der Legendre-Funktionen.
Hinweis: Die Ladungsdichte ist

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma_0\frac{\delta(\cos\vartheta)}{r}$$

für $r \leq r_0$ und ansonsten null. Damit hat man

$$\begin{aligned} q_{\ell m} =& \frac{4\pi\sigma_0}{2\ell+1}\int_0^m r^2\mathrm{d}r r^{\ell-1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\vartheta \\ & \cdot\delta(\cos\vartheta)Y^*_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \end{aligned}$$

Die Integrale über r und ϑ können sofort ausgeführt werden:

$$q_{lm} = \frac{4\pi\sigma_0 r_0^{\ell+2}}{(2\ell+1)(\ell+2)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi Y^*_{\ell m}(\pi/2,\varphi)$$

Für das Integral über φ beachte, dass die φ -Abhängigkeit von $Y_{\ell m}$ allein in dem Faktor $e^{im\varphi}$ steckt. Wegen

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi\delta_{m0}$$

folgt sofort, dass $q_{\ell m} = 0$ ist für alle $m \neq 0$ und

$$\begin{aligned} q_{\ell 0} &= \frac{8\pi^2\sigma_0 r_0^{\ell+2}}{(2\ell+1)(\ell+2)} Y_{\ell 0}^*(\pi/2, 0) \\ &= \frac{2\pi\sigma_0 r_0^{\ell+2}}{\ell+2}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} P_\ell(0) \end{aligned}$$

Für die weitere Auswertung benutzt man zunächst, dass für ungerade ℓ die Legendre-Funktionen P_ℓ ungerade Funktionen sind, also $P_\ell(0) = 0$ gilt. Für gerade ℓ kann man dagegen beispielsweise folgende Formel benutzen, die man in der mathematischen Literatur findet:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell/2}(-1)^k \begin{pmatrix} \ell \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\ell - 2k \\ \ell \end{pmatrix} x^{\ell-2k}$$

Für $x = 0$ bleibt der Summand mit $k = \ell/2$ übrig, also

$$P_\ell(0) = \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ \ell/2 \end{pmatrix}$$

Schließlich bleib für gerade ℓ:

$$q_{\ell 0} = \frac{2\pi\sigma_0 r_0^{\ell+2}}{\ell+2}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \begin{pmatrix} \ell \\ \ell/2 \end{pmatrix}$$

Alle anderen Multipolmomente verschwinden.

2.2 Sphärisch symmetrisch Ladungsverteilungen

Zeige: Für um den Ursprung sphärisch symmetrische Ladungsverteilungen verschwinden das Dipol- und das Quadrupolmoment.
Lösung: Da die Ladungsverteilung sphärisch symmetrisch ist empfiehlt es sich, in Kugelkoordinaten zu arbeiten. Das Dipolmoment für eine solche Ladungsverteilung $\rho(r)$ ist

$$\boldsymbol{p} = \int \rho(r)\boldsymbol{r}\mathrm{d}V = \int_0^\infty r^3\rho(r)\mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{e}_r$$

Wie man in Kugelkoordinaten leicht sieht, verschwinden die Winkelintegrale über die Komponenten von $\boldsymbol{e}_r$ alle, also verschwindet das Dipolmoment. Ähnlich kann man bei den Nicht-Diagonalelementen des Quadrupolmoments argumentieren; beispielsweise hat man

$$Q_{12} = \int \rho(r) 3xy\mathrm{d}V = 3\int_0^\infty r^4\rho(r)\mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

Für die Diagonalelemente berechnen wir erst mal

$$\int \rho(r)x^2\mathrm{d}V = \int_0^\infty r^4\rho(r)\mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega \sin^2\vartheta\cos^2\varphi$$

Die Winkelintegrale kann man leicht explizit auswerten; man erhält

$$\int \rho(r)x^2\mathrm{d}V = \int_0^\infty r^4\rho(r)\mathrm{d}r \cdot \frac{4}{3}\pi$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch bei den Integralen über y^2 bzw. $z2$. Damit folgt sofort

$$Q_{11} = \int \rho(r)\left(2x^2 - y^2 - z^2\right)\mathrm{d}V = 0$$

und ebenso $Q_{22} = Q_{33} = 0$

2.3 Ladungsdichte des Wasserstoffatoms

Die Ladungsdichte eines Wasserstoffatoms im Grundzustand erzeugt das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{e}{r^2}\mathrm{e}^{-2r/a_0}\vec{e}_r$$

1. Berechnen Sie daraus die Gesamtladung Q des Wasserstoffatoms, das heißt die Ladung, die in einer Sphäre mit Radius $R \to \infty$ eingeschlossen ist
2. Bestimmen Sie die Ladungsdichte des Wasserstoffatoms

Lösung: 1. Für die Gesamtladung erhalten wir

$$Q_V = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\varphi e \mathrm{e}^{-2R/a_0} = e\mathrm{e}^{-2R/a_0} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

2. Die Ladungsdichte wird

$$\rho(\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}) - \frac{e}{2\pi a_0 r^2}\mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

2.4 Feld und Energie einer geladenen Vollkugel

1. Eine Vollkugel mit Radius R habe die Ladungsdichte

$$\rho(r) = \frac{15Q}{2\pi R^5}\left(r - \frac{R}{2}\right)^2$$

wobei r den Abstand zum Mittelpunkt der Kugel bezeichnet. Welches elektrische Feld von dieser Ladungsdichte erzeugt?
2. Wie groß ist die Feldenergie innerhalb einer Sphäre mit Raidus r und Mittelpunkt im Zentrum der Kugel?

Lösung: 1. Die Ladungsdichte lautet

$$\rho(\vec{x}) = \frac{15Q}{2\pi R^5}\left(r - \frac{R}{2}\right)^2 \Theta(R - r)$$

Aus der sphärischen Symmetrie der Ladungsdichte erhält man, dass $\vec{E} = E\vec{e}_r$. Mit dem Satz von Gauß erhält man durch Integration über eine Sphäre mit Radius r, zentriert über den Ursprung,

$$\int \mathrm{d}^3x\vec{\nabla}\vec{E} = \int \mathrm{d}AE = 4\pi r^2 E = 4\pi\int \mathrm{d}^3x\rho(\vec{x})$$

und damit weiterhin

$$\begin{aligned}E(r) &= \frac{30Q}{r^2R^5}\left[\Theta(r-R)\int_0^R \mathrm{d}rr^2\left(r - \frac{R}{2}\right)^2 + \Theta(R-r)\int_0^r \mathrm{d}rr^2\left(r - \frac{R}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{Q}{R^2}\left[\Theta(r-R) + \Theta(R-r)\left(6\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{15}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{5}{2}\frac{r}{R}\right)\right]\end{aligned}$$

2. Für die Feldenergie innerhalb einer Sphäre mit Radius r erhält man

$$U(r) = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}^3x\vec{E}^2(\vec{x}) = \frac{1}{2}\int_0^r \mathrm{d}rE^2(r)$$

$$= \frac{Q^2}{2R}\left[\Theta(r-R)\left(U_2(r/R) + U_1(1)\right) + \Theta(R-r)U_1(r/R)\right]$$

wobei

$$\begin{aligned}U_1(x) &= \int_0^x \mathrm{d}xx^2\left(6x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 \\ &= 4x^9 - \frac{45}{4}x^8 + \frac{345}{28}x^7 - \frac{25}{4}x^6 + \frac{5}{4}x^5 \\ U_2(x) &= \int_1^x \mathrm{d}xx^2 = \frac{x^3-1}{3}\end{aligned}$$

2.5 Potenzial im Würfel

Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge L. Die Seitenflächen befinden sich auf Potenzial null bis auf die Deckenfläche bei $z = L$ mit Potenzial $v(x, y)$ und die Seitenfläche bei $x = L$ mit Potenzial $u(y, z)$. Bestimmen Sie das Potenzial im Inneren des Würfels für
a) $v(x, y) = v_0 \sinh\left(\frac{y}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad u(y, z) = 0$
b) $v(x, y) = v_0 \frac{xy}{L^2}$, $u(y, z) = u_0 \frac{yz}{L^2}$
Lösung: 1. Für den Fall $u = 0$ und $v \neq 0$ ist die allgemeine Lösung der Laplace Gleichung

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z)$$

wobei

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_{nm} = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_m^2}$$

Mit Berücksichtigung der Randbedingungen für den Würfel insbesondere für $z = L$ und der Orthonormalität der Sinusfunktionen erhalten wir für das Potenzial

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{v_0 \omega_m L \sinh(1)}{1 + \omega_m^2 L^2} \cdot \sin(\omega_2 x) \sin(\omega_m y) \frac{\sinh(\omega_{2m} z)}{\sinh(\omega_{2m} L)}$$

2. Das Potenzial muss hier als Linearkombination zweier Anteile dargestellt werden, von denen beide jeweils an allen Wänden bis auf einer verschwinden

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(A_{nm} \sinh(\omega_{nm} x) \sin(\omega_n y) \sin(\omega_m z) \right. \\ \left. + B_{nm} \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z)\right)$$

Da die Randbedingungen and beiden Flächen analog sind, reicht es, nur eine davon zu berechnen. Das gesamte Potenzial wird dann

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^{n+m}}{\omega_n \omega_m L^2 \sinh(\omega_{nm} L)} \left(u_0 \sinh(\omega_{nm} x) \sin(\omega_n y) \right. \\ \left. \cdot \sin(\omega_m z) + v_0 \sin(\omega_n x) \sin(\omega_m y) \sinh(\omega_{nm} z)\right)$$

2.6 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Für rotationssymetrische Systeme lässt sich die Lösung der Laplace-Gleichung schreiben als

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

wobei P_l die Legendre-Polynome sind. Diese erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_k(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}$$

1. Eine unendlich dünne und leitfähige Kugelschale mit Radius R wird in eine homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$, gebracht. Wie lautet das Potenzial $\Phi(r, \theta)$ im Außenraum? Welche Flächenladunsdichte $\sigma(\theta)$ wird auf der Kugelschale erzeugt?
2. Auf einer unendlich dünnen Kugelschale mit Radius R liegt das Potenzial $V(\theta)$ an. Der Innen- und Außenraum der Schale ist frei von Ladungen. Entwickeln Sie V nach Legendre-Polynomen und geben Sie so das Potenzial Φ im Innen- und Außenraum an. Was ergibt sich für den Spezialfall $V(\theta) = V_0 \cos^2\theta$?
Lösung: 1. Für das Potenzial erhält man

$$\Phi(r, \theta) = E\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) P_1(\cos\theta)$$

Die Flächenladungsdichte ergibt sich aus

$$\begin{aligned}4\pi\sigma(\theta) =&E_r(R,\theta) = -\partial_r\Phi(R,\theta) = 3EP_1(\cos\theta)\\ \Rightarrow \sigma(\theta) =& \frac{3E}{4\pi}P_1(\cos\theta)\end{aligned}$$

2. Entwickeln wir V nach Legendre-Polynomen, erhalten wir

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\cos\theta)$$

wobei $a_l = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)P_l(\cos\theta)V(\theta)$. Mit dem Potenzial im Innen- und Außenraum und auf der Schale, den Randbedingungen und der Entwicklung von V erhalten wir

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left\{\begin{array}{cc} (r/R)^l, & r > R \\ 1, & r = R \\ (R/r)^{l+1}, & r < R \end{array}\right\} P_l(\cos\theta)$$

und für den Spezialfall $V(\theta) = V_0\cos^2\theta$ schließlich

$$\Phi(r,\theta) = \frac{V_0}{3}\cdot\begin{cases} P_0(\cos\theta) + 2(r/R)^2P_2(\cos\theta), & r > R \\ P_0(\cos\theta) + 2P_2(\cos\theta), & r = R \\ (R/r)P_0(\cos\theta) + 2(R/r)^3P_2(\cos\theta), & r < R \end{cases}$$

2.7 Geladene Halbkugelschale

Eine dünne geladene halbkugelförmige Schale mit Radius R trage eine homogene Oberflächenladungsdichte σ. Berechnen Sie das Potenzial entlang der Symmetrieachse! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie das Potenzial im Kugelmittelpunkt ausrechnen, wofür keine Integrale zu lösen sind!

Lösung: Das Problem kann durch Integration von $\phi(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}V'\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ gelöst werden, wobei das Integral nur über eine Hemisphäre ($\cos\vartheta' > 0$) bei $r' = R$ geht:

$$\phi(r) = R^2\sigma\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^1 \mathrm{d}\left(\cos\vartheta'\right)\frac{1}{|r-r'|}$$

Entlang der z-Achse ist der Integrand φ -unabhängig, und man bekommt

$$\begin{aligned}\phi(z) &= 2\pi R^2\sigma\int_0^1 \mathrm{d}\left(\cos\vartheta'\right)\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2-2Rz\cos\vartheta'}}\\ &= 2\pi R^2\sigma\frac{-1}{Rz}\sqrt{R^2+z^2-2Rz\zeta}\Big|_{\xi=0}^{1}\\ &= 2\pi\sigma R\frac{\sqrt{R^2+z^2}-\sqrt{(R-z)^2}}{z}\\ &= 2\pi\sigma R\frac{\sqrt{R^2+z^2}-|R-z|}{z}\end{aligned}$$

Vom Kugelmittelpunkt bei $z = 0$ haben alle Ladungsbeiträge die Distanz R. Das Potenzial bei $z = 0$ ist daher $\phi(0) = Q/R$ mit $Q = \sigma\left(4\pi R^2\right)/2$. Dies stimmt mit dem Limes $z \to 0$ von oben überein: $\phi(0) = 2\pi\sigma R$

3 Magnetostatik

3.1 Kreisscheibe

In der $x-y-$Ebene befinde sich eine unendlich dünne Kreisscheibe mit Radius ρ_0, deren Mittelpunkt der Ursprung ist. Sie sei homogen geladen mit Flächenladungsdichte σ und rotiere

mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die $z-$Achse. Berechne das Vektorpotenzial
a) exakt auf der $z-$Achse
b) näherungsweise für großen Abstand des Beobachters. Gib mit dem Ergebnis das magnetische Moment der Scheibe an.

Lösung: Wie bei der rotierenden Kugelschale ist die Stromdichte

$$j(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$$

also

$$j(\boldsymbol{r}) = \sigma\omega\varrho\delta(z)\boldsymbol{e}_\varphi$$

Wie bei der kreisförmigen Leiterschleife legen wir uns das Koordinatensystem zur Integration so, dass $\boldsymbol{r}$ in der $x' - z'-$Ebene liegt. Dann haben wir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma\omega}{c}\int_0^{\varrho_0} \mathrm{d}\varrho' \int_0^{2\pi} e'\mathrm{d}\varphi' \frac{\varrho' \boldsymbol{e}_{\varphi'}}{\sqrt{r^2 + \varrho'^2 - 2QQ'\cos(\varphi')}}$$

wobei wie üblich Konstanten schon vor das Integral gezogen und der Betrag im Nenner gleich ausführlich hingeschrieben wurde. Wie bei der Leiterschleife argumentiert man wieder, dass die x'-Komponente verschwindet (da über eine in φ' ungerade Funktion integriert wird), ersetzt wieder $\boldsymbol{e}_{y'}$ durch $\boldsymbol{e}_\varphi$ und zieht diesen konstanten Vektor wieder aus dem Integral heraus. Es folgt also wieder, dass die einzige nicht verschwindende Komponente des Vektorpotenzials

$$A_\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma\omega}{c}\int_0^{e_0} \mathrm{d}\varrho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \frac{\varrho'^2 \cos\varphi'}{\sqrt{r^2 + \varrho'^2 - 2\varrho Q'\cos\varphi'}}$$

ist.
a) Auf der z-Achse vereinfacht sich das Integral deutlich:

$$A_\varphi(0,0,z) = \frac{\sigma\omega}{c}\int_0^{e_0} \mathrm{d}\varrho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \frac{\varrho'^2 \cos\varphi'}{\sqrt{r^2 + \varrho'^2}}$$

Die Winkelintegration kann sofort ausgeführt werden und man sieht, dass A_φ auf der z-Achse verschwindet.
b) Wir schreiben

$$A_\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma\omega}{cr}\int_0^{\rho_0} \mathrm{d}\varrho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \frac{\varrho'^2 \cos\varphi'}{\sqrt{1 + (\varrho'/r)^2 - 2(\varrho'/r)\sin\vartheta\cos\varphi'}}$$

und entwickeln den Integranden für $\varrho' \leq \varrho_0 \ll r$. Berücksichtigen wir wieder, dass Integrale über ungerade Potenzen von $cos\varphi'$ verschwinden, so haben wir für die niedrigste nicht-verschwindende Ordnung

$$\begin{aligned}
A_\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{\sigma\omega}{cr}\int_0^{e_0} \mathrm{d}\varrho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \varrho'^2 \cos\varphi' \cdot \frac{\varrho'}{r}\sin\vartheta\cos\varphi' \\
&= \frac{\sigma\omega\sin\vartheta}{cr^2}\int_0^{e_0} \mathrm{d}\varrho' \varrho'^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \cos^2\varphi' \\
&= \frac{\pi\varrho_0^4\sigma\omega\sin\vartheta}{4cr^2}
\end{aligned}$$

Das magnetische Moment der Scheibe zeigt sicher in z-Richtung. Also ist in niedrigster Ordnung der Multipolentwicklung

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \frac{m\boldsymbol{e}_z \times (\sin\vartheta\boldsymbol{e}_\varrho + \cos\vartheta\boldsymbol{e}_z)}{r^2} = \frac{m\sin\vartheta}{r^2}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Daraus und aus dem Ergebnis oben folgt sofort

$$\boldsymbol{m} = \frac{\pi\varrho_0^4\sigma\omega}{4c}e_z$$

3.2 Punktladung

Eine Punktladung der Stärke q bewege sich auf einer Bahn $\boldsymbol{r_q(t)}$ und erzeuge dadurch eine Stromdichte $\boldsymbol{j}$. Zeige, dass das (momentane) magnetische Moment dieser Stromdichte proportional zum (momentanen) Drehimpuls der Punktladung ist.
Lösung: Es gilt

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}(t)) = q\boldsymbol{v}(t)\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q(t)\right)$$

mit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_q$. Eingesetzt in die Definition $\boldsymbol{m} := \frac{1}{2c}\int\left(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right)\right)\mathrm{d}V'$ ergibt dies

$$\boldsymbol{m}(t) = \frac{q}{2c}\int\left(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}(t)\right)\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_q(t)\right)\mathrm{d}V' = \frac{q}{2c}\left(\boldsymbol{r}_q(t) \times \boldsymbol{v}(t)\right)$$

Da aber bekanntlich $L = r \times p = mr \times v$ ist, folgt daraus sofort

$$\boldsymbol{m}(t) = \frac{q}{2mc}\boldsymbol{L}(t)$$

Das gyromagnetische Verhältnis einer bewegten Punktladung ist also $\frac{q}{2mc}$. Da man sich jede Ladungsverteilung aus Punktladungen zusammengesetzt vorstellen kann, folgt, dass dies auch das gyromagnetische Verhältnis einer beliebigen bewegten Ladungsverteilung ist - vorausgesetzt, diese bewegt sich äm Stückünd verformt sich nicht.

3.3 Gegeninduktion von zwei parallelen Kreisen

Zeigen Sie, dass der Gegeninduktionskoeffizient von zwei parallelen kreisförmigen Stromleitern mit Radius a bei $z = \pm h$ folgende Integraldarstellung hat:

$$L_{12} = \frac{\pi a^2}{c^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\cos\varphi}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2(1-\cos\varphi)}}$$

Lösung: Die Definition der Gegeninduktionskoeffizienten führt auf das doppelte Linienintegral

$$L_{12} = \frac{1}{c^2}\oint_{L_1 I_2}\frac{\mathbf{d}r_1 \cdot \mathbf{d}r_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$$

In Kugelkoordinaten oder auch Zylinderkoordinaten ist

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right)^2 &= a^2\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right)^2 + a^2\left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right)^2 + 4h^2 \\
&= 2a^2\left[1 - \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right] + 4h^2
\end{aligned}$$

$$\mathbf{d}r_1 \cdot \mathbf{d}r_2 = a^2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\mathrm{d}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_2$$

und die Linienintegrale reduzieren sich auf zwei Integrationen über φ_1 und φ_2, jeweils von 0 bis 2π. Durch die Variablensubstitution $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ entkoppeln diese. Die Integration über φ_2 ergibt einen Vorfaktor 2π und es bleibt das nicht durch elementare Funktionen lösbare Integral aus der Angabe über.

4 Elektrische und magnetische Felder in polarisierbarer bzw. magnetisierbarer Materie

4.1 Dielektrikum und Grenzbedingungen

Gegeben sei eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d in der yz- Ebene. Das Material der Platte ist ein lineares Dielektrikum mit dielektrischer Suszeptibilität χ_e. Die freie Ladungsdichte ist überall null. Diese Platte befindet sich in einem externen Feld

$$\vec{E}_{\text{ex}} = E \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{in}}$ und die Verschiebungsdichte $\vec{D}_{\text{in}}$ innerhalb der Platte. Wie lautet der Ausdruck für $\vec{E}$ und $\vec{D}$ im gesamten Raum?
2. Berechnen Sie die gebundene Ladungsverteilung.
3. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{E}_{in}$ und der x-Achse.

Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so, dass die Platte von $x = -d/2$ bis $d/2$ reicht. Es ist $\vec{D}_{\text{ex}} = \vec{E}_{\text{ex}}, \vec{D}_{\text{in}} = \varepsilon\vec{E}_{\text{in}}$ mit $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_{\text{c}}$. Die Ausdrücke für das elektrische Feld und die Verschiebungsdichte in der Platte werden bei Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

$$\vec{E}_{\text{in}} = E \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{D}_{\text{in}} = E \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \varepsilon\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für den gesamten Raum werden

$$\vec{E} = E \begin{pmatrix} \cos\alpha\left[\Theta\left(x-\frac{d}{2}\right)+\Theta\left(-x-\frac{d}{2}\right)+\varepsilon^{-1}\Theta\left(\frac{d}{2}-x\right)\Theta\left(\frac{d}{2}+x\right)\right] \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = E \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\left[\Theta\left(x-\frac{d}{2}\right)+\Theta\left(-x-\frac{d}{2}\right)+\varepsilon\Theta\left(\frac{d}{2}-x\right)\Theta\left(\frac{d}{2}+x\right)\right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Freie Ladungen sind nach Voraussetzung nicht vorhanden, dementsprechen ist auch $\vec{\nabla}\vec{D} = 0$. Gebundene Ladungen sind jedoch an den Oberflächen der Platte vorhanden. Diese sind Quellen des elektrischen Feldes:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{E\cos\alpha}{4\pi}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[\delta\left(x-\frac{d}{2}\right)-\delta\left(x+\frac{d}{2}\right)\right]$$

3. Der Winkel γ zwischen $\vec{E}_{in}$ und der x-Achse ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \cos\gamma = \frac{E_{\text{in},x}}{\left|\vec{E}_{\text{in}}\right|} &= \frac{\varepsilon^{-1}\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\varepsilon^{-2}\cos^2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\tan^2\alpha}} \\ \Rightarrow \gamma &= \arctan(\varepsilon\tan\alpha) \end{aligned}$$

5 Ebene Wellen

5.1 Elliptische und lineare Polarisation

Gegeben sei eine Summe zweier gegeneinander phasenverschobener Wellen, von denen die eine in in x-, die andere in $y-$Richtung linear polarisiert ist

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = E_{x0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\hat{\boldsymbol{e}}_x + E_{y0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\varphi)}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

mit reellen Amplituden E_{x0} und E_{y0}; die gesamte Intensität ist also $I = E_{x0}^2 + E_{y0}^2$
Zeigen Sie zunächst, dass gilt

$$\frac{|E_x(t,r)|^2}{E_{x0}^2} + \frac{|E_y(t,r)|^2}{E_{y0}^2} - \frac{2\,\mathrm{Re}\,E_x^* E_y \cos\varphi}{E_{x0}E_{y0}} = 2\sin^2\varphi$$

b) Zeigen sie mittels einer Hauptachsentransformation, dass die Gleichung in Teilaufgabe a) eine Ellipse beschreibt, deren Hauptachsenverhältnis gegeben ist durch

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{I - \sqrt{I^2 - 4E_{x0}^2 E_{y0}^2 \sin^2\varphi}}{I + \sqrt{I^2 - 4E_{x0}^2 E_{y0}^2 \sin^2\varphi}}}$$

und deren große Hauptachse gegenüber der x-Achse um den Winkel α gedreht ist, wobei gilt

$$\tan\alpha = \frac{E_{y0}^2 - E_{x0}^2 + \sqrt{I^2 - 4E_{x0}^2 E_{y0}^2 \sin^2\varphi}}{2E_{x0}E_{y0}\cos\varphi}$$

Lösung: a) Dies ist einfach nachzurechnen:

$$\frac{|E_x(t,r)|^2}{E_{x0}^2} = \frac{|E_y(t,r)|^2}{E_{y0}^2} = 1$$

und

$$\frac{2\,\mathrm{Re}\,E_x^* E_y \cos\varphi}{E_{x0}E_{y0}} = 2\cos^2\varphi$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.
b) Die Gleichung ist auch folgendermaßen darstellbar:

$$(E_x, E_y)^\top A \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 1$$

wobei die Matrix A folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2E_{x0}^2 \sin^2\varphi} & -\frac{\cos\varphi}{2E_{x0}E_{y0}\sin^2\varphi} \\ -\frac{\cos\varphi}{2E_{x0}E_{y0}\sin^2\varphi} & \frac{1}{2E_{y0}^2\sin^2\varphi} \end{pmatrix}$$

Für das Hauptachsenverhältnis ist nur das Verhältnis der Eigenwerte dieser Matrix wesentlich, für den Tangens des Drehwinkels nur Verhältnis der Komponenten der Eigenvektoren. Beides ändert sich nicht, wenn man die Matrix mit einer beliebigen Konstanten multipliziert. Wir arbeiten deshalb im Folgenden mit der Matrix $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot 2E_{x0}^2 E_{y0}^2 \sin^2\varphi$ also

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} E_{y0}^2 & -E_{x0}E_{y0}\cos\varphi \\ -E_{x0}E_{y0}\cos\varphi & E_{x0}^2 \end{pmatrix}$$

Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte dieser Matrix aus der charakteristischen Gleichung:

$$\left(E_{y0}^2 - \lambda\right)\left(E_{x0}^2 - \lambda\right) - E_{x0}^2 E_{y0}^2 \cos^2\varphi = 0$$

Ausmulitplizieren und Vereinfachen führt auf eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{I \pm \sqrt{I^2 - 4E_{x0}^2 E_{y0}^2 \sin^2\varphi}}{2}$$

Zunächst sehen wir, dass beide Eigenwerte positiv sind, also handelt es sich hier in der Tat um eine Ellipse. Deren Halbachsen ergeben sich direkt aus den Eigenwerte:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

wobei λ_1 bzw. λ_2 die Lösung mit dem negativen bzw. dem positiven Vorzeichen der Wurzel ist. Aus diesen Zusammenhängen erhält man die Behauptung über das Achsenverhältnis. Der Drehwinkel ergibt sich aus den Eigenvektoren, da ja die Drehmatrix, mit der die Matrix $\boldsymbol{B}$ in Diagonalgestalt gebracht wird, aus den Eigenvektoren aufgebaut ist. Der Eigenvektor v_1 zu λ_1 entspricht der ersten Spalte der Matrix. Somit kann man schreiben

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

und man erhält den Tangens des Winkels als

$$\tan\alpha = \frac{v_{1y}}{v_{1x}}$$

Es bleibt noch v_1 zu bestimmen. Diesen Eigenvektor erhält man aus

$$(\boldsymbol{B} - \lambda_1 \boldsymbol{E}_2)\, \boldsymbol{v}_1 = 0$$

Es muss also

$$(b_{11} - \lambda_1)\, v_{1x} + b_{12} v_{1y} = 0$$

gelten (und eine weitere Gleichung, die sich aus der zweiten Zeile der Matrix ergibt, aber zu demselben Ergebnis führt). Somit hat man

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_1 - b_{11}}{b_{12}}$$

woraus man sofort das angegebene Ergebnis erhält.

5.2 Natürliche Linienbreite

Strahlt ein Atom oder Molekül, das von einem angeregten Zustand in einen niedrigeren übergeht, eine elektromagnetische Welle der Frequenz ω_0 ab, so muss die Amplitude dieser Welle zeitlich abnehmen (warum?). Im Allgemeinen ergibt sich deshalb für die elektrische Feldstärke dieser Welle am Ort des Atoms eine exponentiell gedämpfte Schwingung. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{E}(\omega)$ der elektrischen Feldstärke und daraus, wie die abgestrahlte Energie pro infinitesimalem Frequenzintervall von ω abhängt. Interpretieren Sie das Ergebnis.
Hinweis: Überlegen Sie sich wie der Poynting-Vektor einer ebenen monochromatischen Welle im Vakuum von der elektrischen Feldstärke abhängt.
Lösung: Die abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit und damit auch die elektrische Feldstärke muss zeitlich abnehmen, weil insgesamt ja nur eine endliche Energiemenge abgestrahlt wird. Speziell bei einer exponentiell gedämpften Schwingung gilt für die elektrische Feldstärke in Abhängigkeit der Zeit:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ E_0 \cos(\omega_0 t)\, \mathrm{e}^{-\gamma t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Fourier-Transformierte ist also

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)-\gamma]t} + \mathrm{e}^{[\mathrm{i}(-\omega_0-\omega)-\gamma]t}}{2} \\ &= -\frac{E_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\mathrm{i}\,(\omega_0 - \omega) - \gamma} + \frac{1}{\mathrm{i}\,(-\omega_0 - \omega) - \gamma} \right) \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma + \mathrm{i}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \gamma^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega} \end{aligned}$$

Da der Poynting-Vektor proportional zur elektromagnetischen Energiedichte ist und in einer elektromagnetischen Welle im Vakuum die Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes gleich sind, ist die abgestrahlte Energie (pro Frequenzintervall) letztlich einfach proportional zum (Betrags-) Quadrat der elektrischen Feldstärke, also proportional zu

$$\frac{\gamma^2+\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2-\gamma^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

Dies beschreibt eine typische Resonanzkurve mit dem Maximum bei der Frequenz $\sqrt{\omega_0^2+\gamma^2}$ und der Breite 2γ. Obwohl die Energie eigentlich bei der festen Frequenz ω_0 abgestrahlt wird, ergibt sich im Spektrum also keine scharfe Linie bei ω_0 sondern eine verbreiterte Linie bei $\sqrt{\omega_0^2+\gamma^2}$. Diese Verbreiterung (und Verschiebung) der Linie rührt nur daher, dass die Abstrahlung zeitlich abnehmen muss, geschieht also völlig ohne äußere Einflisse (wobei die Linie umso schmäler ist, je länger die Abstrahlung dauert). Deshalb spricht man hier von der natürlichen Linienbreite.

5.3 Strahlungsdämpfung

Betrachten Sie eine harmonisch schwingende Punktladung (Stärke q, Eigenfrequenz ω_0, Masse m), auf die zusätzlich eine Strahlungsdämpfungskraft $F_{\mathrm{Str}}=\frac{2q^2\dot{v}}{3c^3}=\frac{2q^2\dddot{x}}{3c^3}$ wirkt, deren Stärke klein verglichen mit der Rückstellkraft ist. Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass sich die Schwingungsfrequenz der Punktladung durch diese Kraft kaum ändert,

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t-\gamma t}$$

mit dem Dämpfungsfaktor

$$\gamma=\frac{q^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

gilt.
Lösung: Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x}+m\omega_0^2=\frac{2q^2\dddot{x}}{3c^3}$$

Da dies eine lineare Differenzialgleichung ist, deren ungestörte Lösungen harmonische Schwingungen sind, liegt der Ansatz

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

nahe. Einsetzen führt auf

$$-\omega^2+\omega_0^2=\mathrm{i}\frac{2q^2}{3mc^3}\omega^3$$

Die Schwingungsfrequenz soll sich durch die Dämpfung kaum ändern, es soll also

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega$$

mit $|\Delta\omega|\ll\omega_0$ gelten. Dies ergibt

$$\omega^2\approx\omega_0^2+2\Delta\omega\omega_0\quad\text{und}\quad\omega^3\approx\omega_0^3+3\Delta\omega\omega_0^2$$

Setzt man dies ein, so kommt man auf

$$\left(1+\mathrm{i}\frac{q^2\omega_0}{mc^3}\right)\Delta\omega=-\mathrm{i}\frac{q^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

Es wurde aber vorrausgesetzt, dass die Strahlungsdämpfungkraft klein im Vergleich zur Rückstellkraft ist; also gilt

$$\frac{2q^2}{3c^3}\omega^3\ll m\omega_0^2$$

und damit, da $\omega\approx\omega_0$ ist,

$$\frac{2q^2\omega_0}{3mc^3}\ll 1$$

Damit kann der zweite Summand in der Klammer oben vernachlässigt werden, und es bleibt

$$\Delta\omega=-\mathrm{i}\frac{q^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

Mit $\Delta\omega=:-\mathrm{i}\gamma$ erhält man dann genau das angegebene Ergebnis.

5.4 Sendeantenne: Dipolstrahlung

Als Modell für eine Sendeantenne betrachten wir einen unendlich dünnen, geraden Leiter entlang der z -Achse, für dessen Ausdehnung $-L/2 \leq z \leq L/2$ gilt. In diesem Leiter fließt ein Strom mit harmonischer Zeitabhängigkeit, dessen Amplitude in der Mitte I_0 ist und zu den Enden hin linear auf null abfällt.
a) Geben Sie die Stromdichte $j(t,r)$ für diesen Strom an und ermitteln Sie aus der Kontinuitätsgleichung die Ladungsdichte $\rho(t,\boldsymbol{r})$
b) Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment der Antenne und daraus die gesamte im Mittel abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von L und I_0
Hinweis: $\langle P\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}$
Lösung: a) Die Beschränkung auf die z -Achse erreicht man mit zwei Deltafunktionen, die Einschränkung in z - Richtung mit zwei Thetafunktionen und die lineare Abhängigkeit in beide Richtungen schließlich mit einer Betragsfunktion. Die Stromdichte ist also $j(t,r) = j_z(t,r)\hat{e}_z$ mit

$$j_z(t,r) = I_0\delta(x)\delta(y)\theta(L/2-z)\theta(z+L/2)\left(1-\frac{2|z|}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{j}}_0 &= \frac{\partial \dot{j}_{0z}}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\rho_0 \\ &= I_0\delta(x)\delta(\mathrm{y})\theta(L/2-z)\theta(z+L/2)\frac{-2\operatorname{sgn} z}{L}\end{aligned}$$

also

$$\rho(t,r) = \delta(x)\delta(y)\theta(L/2-z)\theta(z+L/2)\frac{2il_0\operatorname{sgn} z}{\omega L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

b) Nach Definition ist das elektrische Dipolmoment

$$\boldsymbol{p}(t) = \int \boldsymbol{r}\rho(t,\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

Wegen der beiden Deltafunktionen hat p nur eine z - Komponente; für diese gilt wegen der Thetafunktionen

$$\begin{aligned}p_z(t) &= \frac{2\mathrm{i}I_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot\int_{-L/2}^{L/2} z\operatorname{sgn} z\mathrm{d}z \\ &= \frac{2\mathrm{i}I_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot 2\int_0^{L/2} z\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}I_0L}{2\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}$$

Setzt man dies in den Hinweis ein, folgt schließlich

$$\langle P\rangle = \frac{\omega^2 I_0^2 L^2}{12c^3}$$

5.5 Sendeantenne: Sphärische Multipole

Als Modell für eine Sendeantenne betrachten wir einen unendlich dünnen, geraden Leiter entlang der z -Achse, für dessen Ausdehnung $-\lambda/2 \leq z \leq \lambda/2$ gilt, wobei λ die Wellenlänge der ausgesandten Strahlung ist. In diesem Leiter fließt ein räumlich konstanter Strom mit harmonischer Zeitabhängigkeit und Amplitude I_0
a)Geben Sie die Stromdichte $j(t,r)$ für diesen Strom an und ermitteln Sie aus der Kontinuitätsgleichung die Ladungsdichte $\rho(t,\boldsymbol{r})$
b) Zeigen Sie, dass die dynamischen sphärischen Multipolmote nur für $m=0$ und ungerade ℓ nicht verschyinden.
c) Berechnen Sie das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment.
Lösung: a) Die Stromdichte lautet

$$j(t,r) = I_0\hat{e}_z\mathrm{e}^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)\theta(\lambda/2-z)\theta(\lambda/2+z)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\begin{aligned}
\rho(t,r) =& \frac{\mathrm{i}}{\omega}\dot{\rho} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\operatorname{div} j = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\partial_j j_z \\
=& \frac{I_0}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)[-\delta(\lambda/2-z)\theta(\lambda/2+z) \\
&+ \theta(\lambda/2-z)\delta(\lambda/2+z)] \\
=& \frac{\mathrm{i}I_0}{\omega}\mathrm{e}^{-i\omega t}\delta(x)\delta(y)[\delta(\lambda/2-z)-\delta(\lambda/2+z)]
\end{aligned}$$

b) Für die Multipolmomente benötigen wir nur den räumlichen Anteil der Ladungsdichte, diesen allerdings in Kugelkoordinaten:

$$\rho_0(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}I_0}{\omega}\delta(\varphi)\delta(r-\lambda/2)\frac{\delta(\vartheta)-\delta(\vartheta-\pi)}{r^2\sin\vartheta}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
q_{\ell m} =& \frac{4\pi(2\ell-1)!!}{k^\ell}\frac{\mathrm{i}I_0}{\omega}\int \mathrm{d}V'\delta\left(\varphi'\right)\delta\left(r'-\lambda/2\right) \\
&\cdot \frac{\delta\left(\vartheta'\right)-\delta\left(\vartheta'-\pi\right)}{r^2\sin\vartheta'} j_\ell\left(kr'\right)Y^*_{\ell m}\left(\vartheta',\varphi'\right) \\
=& \frac{4\pi(2\ell-1)!!}{ck^{\ell+1}}\mathrm{i}I_0 j_\ell(k\lambda/2)\left[Y^*_{\ell m}(0,0)-Y^*_{\ell m}(\pi,0)\right]
\end{aligned}$$

wobei j_ℓ die sphärische Bessel-Funktion der Ordnung ℓ ist. Benutzt man die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen aus Kap. 3, so sieht man zunächst, diess dieser Ausdruck nur für $m=0$ nicht verschwindet; man hat dann

$$q_{\ell 0} = \frac{4\pi(2\ell-1)!!}{ck^{\ell+1}}\mathrm{i}I_0 j_\ell(\pi)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\left[P_\ell(1)-P_\ell(-1)\right]$$

mit den Legendre-Polynomen P_ℓ, wobei auch noch $k=2\pi/\lambda$ eingesetzt wurde. Da außerdem auch $P_\ell(1)=1$ und $P_\ell(-1)=(-1)^\ell$ gilt, folgt sofort, dass alle Multipolmomente mit geradem ℓ verschwinden. Für gerades ℓ ist dagegen der Klammerausdruck einfach gleich 2.

c) Das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment ist

$$q_{10} = \frac{4\sqrt{3\pi}\mathrm{i}I_0}{ck^2}j_1(\pi)$$

Die sphärische Bessel-Funktion erster Ordnung kann man auch noch explizit auswerten. Es ist

$$j_1(x) = -x\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$$

also

$$j_1(\pi) = \frac{1}{\pi}$$

Damit haben wir schließlich

$$q_{10} = \frac{4\mathrm{i}\sqrt{3}I_0}{\sqrt{\pi}ck^2}$$

5.6 Magnetische Dipolstrahlung

Wir betrachten einen kreistörmigen, unendlich dünnen Leiter in der $x-y$-Ebene mit Radius ϱ_0, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Der Leiter werde von einem Strom der Amplitude I_0 mit harmonischer Zeitabhängigkeit in mathematisch positiver Richtung durchflossen; wir haben also in Zylinderkoordinaten

$$\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{r}) = I_0\delta\left(\varrho-\varrho_0\right)\delta(z)\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Dabei gelte $\omega\varrho_0/c \ll 1$

a) Zeigen Sie, dass die Ladungsdichte zeitlich konstant ist, und berechnen Sie das magnetische Dipolmoment m dieser Stromverteilung.
b) Berechnen Sie das retardierte Vektorpotenzial in großem Abstand (Fernfeld) in Abhängigkeit der Amplitude des magnetischen Dipolmoments.
c) Berechnen Sie daraus die elektromagnetischen Feldstärken und den Poynting-Vektor in Abhängigkeit des mangetischen Dipolmoments. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis

$$S(t,r) = \frac{\ddot{p}^2(t-r/c)}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\hat{e}_r$$

bei der elektrischen Dipolstrahlung.

Lösung: a) Die Divergenz von j ist

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial j_\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

also ist nach der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} = 0$ und damit $\rho(t) = \text{const}$. Das magnetische Dipolmoment ist nach Definition

$$\begin{aligned}
m(t) &= \frac{1}{2c}\int \mathrm{d}V r \times j \\
&= \frac{I_0}{2c}\mathrm{e}^{-i\omega t}\int \delta\left(\varrho-\varrho_0\right)\delta(z)\left[\left(\rho\hat{e}_e + z\hat{e}_z\right)\times\hat{e}_\varphi\right]\mathrm{d}V \\
&= \frac{I_0}{2c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int \delta\left(e-\varrho_0\right)\delta(z)\left(\hat{e}\hat{e}_z - z\hat{e}_e\right)\varrho\mathrm{d}e\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \\
&= \frac{I_0}{2c}\mathrm{e}^{-i\omega t}2\pi e_0^2\hat{e}_z =: m_0\mathrm{e}^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

b) Es gilt für das Fernfeld in niedrigster Ordnung

$$A(t,r) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\int \mathrm{d}V\frac{j_0\left(r'\right)}{c}$$

Berechnet man das Volumenintegral für die hier gegebene Stromverteilung, so ergibt sich allerdings wegen der Periodizität von $\hat{e}_\varphi$

$$\frac{I_0}{c}\int \mathrm{d}V'\delta\left(\varrho'-\varrho_0\right)\delta\left(z'\right)\hat{e}_{\varphi'} = 0$$

Wir müssen deshalb auch die nächsthöhere Ordnung in der Entwicklung nach kr' berücksichtigen, wir haben also

$$A(t,r) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int dV\frac{j_0\left(r'\right)}{c}\left(1 - ik\cdot r'\right)$$

Das Integral über den ersten Summanden verschwindet, wie eben gezeigt; es bleibt noch das Integral über den zweiten Summanden zu berechnen. Dies ist

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}V'\frac{j_0\left(\boldsymbol{r}'\right)}{c}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right) \\
&= \frac{I_0}{c}\int \mathrm{d}V'\delta\left(\varrho'-\varrho_0\right)\delta\left(z'\right)\hat{e}_{\varphi'}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right) \\
&= \frac{I_0}{c}\int_0^{2\pi}\varrho_0\mathrm{d}\varphi'\hat{e}_{\varphi'}\left(\boldsymbol{k}\cdot\varrho_0\hat{e}_{Q'}\right) \\
&= \frac{I_0\varrho_0^2}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\left(-\sin\varphi'\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi'\hat{\boldsymbol{e}}_y\right) \\
&\quad\cdot\left(k_x\cos\varphi' + k_y\sin\varphi'\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{I_0 \varrho_0^2}{c} \pi \left(-k_y \hat{e}_x + k_x \hat{e}_y\right) \\
&= \frac{I_0 \pi \varrho_0^2}{c} \left(\hat{e}_z \times k\right) = m_0 \times k
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \sin\varphi' \cos\varphi' = 0
$$
$$
\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \sin^2\varphi' = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \cos^2\varphi' = \pi
$$

benutzt wurde. Also ist

$$
\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{m}_0\right)
$$

c) Das magnetische Feld ist

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} =& \nabla \times \boldsymbol{A} \\
=& \left(\nabla \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\right) \times \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{m}_0\right) \\
&+ \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\nabla \times \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{m}_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir die beiden Summanden einzeln. Im ersten hat man zunächst

$$
\begin{aligned}
\nabla \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} &= \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(ik - \frac{1}{r}\right) \hat{e}_r \\
&\approx -\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \hat{e}_r
\end{aligned}
$$

da im Fernfeld $k \gg 1/r$ ist. Im zweiten Summanden stehen dagegen nur Ableitungen von $\hat{e}_r$. Diese liefern jeweils einen Faktor $1/r$, aber keinen Faktor k; deshalb ist der zweite Summand im Fernfeld komplett vernachlässigbar. Es bleibt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= -\frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{m}_0\right)\right) \\
&= \frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\boldsymbol{m}_0 - \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \boldsymbol{m}_0\right) \hat{\boldsymbol{e}}_r\right)
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt noch das doppelte Vektorprodukt aufgelöst wurde. Für das elektrische Feld benötigt man den Gradienten des skalaren Potenzials und die zeitliche Ableitung des Vektorpotenzials. Da die Ladungsdichte zeitlich konstant ist, hat man aber auch ein zeitlich konstantes skalares Potenzial, das somit nicht zur Abstrahlung beitragen kann. Damit ist einfach

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{A} \\
&= -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{i}k\partial_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r \times \boldsymbol{m}_0\right) \\
&= \frac{k^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \left(\boldsymbol{m}_0 \times \hat{\boldsymbol{e}}_r\right)
\end{aligned}
$$

Nimmt man schließlich die Realteile und berechnet daraus den Poynting-Vektor, so ist

$$
\begin{aligned}
S =& \frac{c}{4\pi} \frac{k^4 \cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \\
& \cdot \left(m_0 \times \hat{e}_r\right) \times \left[m_0 - \left(\hat{e}_r \cdot m_0\right) \hat{e}_r\right] \\
=& \frac{c}{4\pi} \frac{k^4 \cos^2(kr - \omega t))}{r^2} \cdot \left[m_0^2 - \left(\hat{e}_r \cdot m_0\right)^2\right] \hat{e}_r \\
=& \frac{c}{4\pi} \frac{k^4 m_0^2 \cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \sin^2\vartheta \hat{e}_r
\end{aligned}
$$

wobei das doppelte Vektorprodukt aufgeliöst und benutzt wurde, dass m_0 in z -Richtung zeigt. Dies kann man nun aber andererseits auch als

$$S(t,r) = \frac{\ddot{m}^2(t-r/c)}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\hat{e}_r$$

schreiben, wobei hier mit m nur der Realteil des magnetischen Dipolmoments gemeint ist. Für magnetische Dipolstrahlung ergibt sich also genau derselbe Ausdruck wie für die elektrische Dipolstrahlung.Da aber für die Größenordnungen der Momente $|\boldsymbol{m}| \approx \beta|\boldsymbol{p}|$ gilt (vgl. die Entwicklung des Vektorpotenzials!), ist die magnetische Dipolstrahlung im Vergleich zur elektrischen um einen Faktor β^2 schwächer.

6 Spezielle Relativitätstheorie

6.1 Wie sieht Licht aus, wenn man ihm mit Lichtgeschwindigkeit nachläuft?

Betrachten Sie eine ebene Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet und linear polarisiert ist gemäß $E_y(t,x) = E_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)$. Wie stellt sich das Feld in einem Bezugssystem S' dar, das sich mit Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung bewegt? Betrachten Sie insbesondere den Limes $v \to c$ und beantworten Sie damit die Frage, die sich Einstein als Jugendlicher stellte, nämlich wie Licht aussieht, wenn man ihm mit Lichtgeschwindigkeit nachläuft.
Lösung: Eine linear polarisiert ebene Welle, die sich in positiver x-Richtung mit elektrischem Feld $\boldsymbol{E} = E_y\hat{\boldsymbol{y}}$ ausbreitet, hat ein Magnetfeld $B_z = E_y$. Mit den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad E'_y = \gamma\left(E_y - \beta B_z\right), \quad E'_z = \gamma\left(E_z + \beta B_y\right) \\ B'_x &= B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \beta E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \beta E_y\right) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma\left(E_y - \beta B_z\right) \\ &= E_y \underbrace{y(1-\beta)}_{t} = E_y\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_y\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \end{aligned}$$

Mit der Lorentz-Transformation $t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right)$, $\frac{x}{c} = \gamma\left(\beta t' + \frac{x'}{c}\right)$ ergibt sich für das Argument der Felder

$$\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = \omega\gamma(1-\beta)\left(t' - \frac{x'}{c}\right)$$

Damit ist die Frequenz in S' in Übereinstimmung mit dem Ergebnis für den relativistischen Doppleréffekt $\frac{k'}{k} = \frac{\omega'}{\omega} = \gamma(1+\beta\cos\alpha)$. Für $\cos\alpha = -1$ gegeben durch

$$\omega' = \gamma(1-\beta)\omega = b\omega$$

Im Limes $\beta = \frac{v}{c} \to 1$ gehen also sowohl die Frequenz als auch die Amplitude der elektromagnetischen Felder gegen null.

7 Anmerkungen

- Die Aufteilung richtet sich nach dem Skript von Prof. Garbrecht aus dem WS 18/19.

mybib