Ferienkurs Experimentalphysik 1

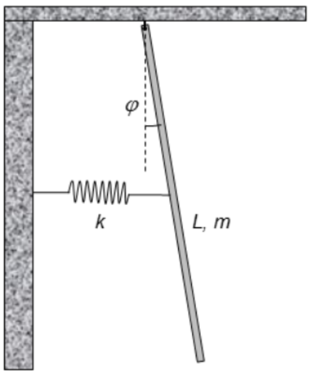
Übungsblatt 4: Lösung

Tutoren: Elena KAISER und Gloria ISBRANDT

1 Oszillatoren und Wellen

1.1 Stangenpendel mit Feder

Eine dünne Stange (Masse m und Längen L) ist am oberen Ende drehbar aufgehängt. Zusätzlich ist eine Feder (Federkonstante k) auf halber Höhe angebracht. Die Feder ist entspannt, wenn die Stange vertikal ausgerichtet ist.



a) Welches gesamte Drehmoment M wirkt auf dieses Stangenpendel, wenn es um einen kleinen Winkel φ ausgelenkt wird? (nur 1. Ordnung von φ)

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

c) Mit welcher Frequenz schwingt das Pendel?

d) Stellen Sie das Ergebnis in dimensionslos dar, indem sie ω/ω_0 angeben, wobei ω_0 die Frequenz für $k = 0$ ist. Geben Sie einen Näherungsausdruck an, der dann gültig ist, wenn k eine kleine Größe ist.

Hinweis: Trägheitsmoment einer Stange für Rotation um den Schwerpunkt ist $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Lösung

a) Das Drehmoment $\vec{M}$ setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen. Am Stangenpendel greifen zwei Kräfte im Schwerpunkt

$$\vec{r} = \frac{L}{2}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

an, die Gewichtskraft $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_y$ und die Federkraft $\vec{F}_k = -k\Delta x\vec{e}_x = -k\frac{L}{2}\sin\varphi\vec{e}_x$. Die beiden Beiträge berechnen sich zu

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L}{2}mg\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k\frac{L}{2}\sin\varphi\frac{L}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Insgesamt wirkt auf das Stangenpendel also ein Drehmoment von $\vec{M} = -\frac{L}{2}\left(mg + k\frac{L}{2}\cos\varphi\right)\sin\varphi\vec{e}_z$ $M\vec{e}_z$. Wird die Kleinwinkelnäherung für $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1$ findet man, dass $M = -\frac{L}{2}\left(mg + k\frac{L}{2}\right)\varphi$.

b) Um die Bewegungsgleichung aufzustellen wird verwendet, dass

$$M = I_{ges}\ddot{\varphi}, \tag{4}$$

wobei I_{ges} das Gesamte Trägkeitsmoment der Stange bei Drehung um den Aufhängepunkt ist. Hierfür wird der Satz von Steiner verwendet

$$I_{ges} = I + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2. \tag{5}$$

Zusammen mit M aus Teilaufgabe a) lässt sich die Bewegungsgleichung für φ aufstellen

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{I_{ges}} = -\frac{3}{2mL}\left(mg + \frac{kL}{2}\right)\varphi = -\frac{3}{2}\left(\frac{g}{L} + \frac{k}{2m}\right)\varphi. \tag{6}$$

c) Die Schwingungsfrequenz ω lässt sich aus der Bewegungsgleichung ablesen, denn

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{g}{L} + \frac{k}{2m}\right)}. \tag{7}$$

d) Für den Fall, dass $k = 0$ ergibt sich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}}. \tag{8}$$

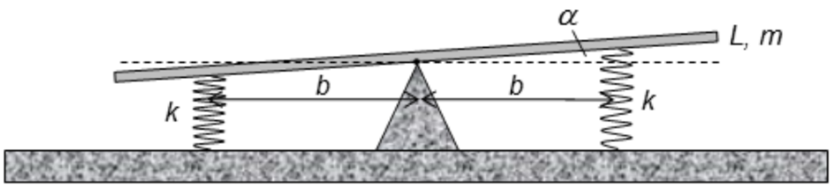
Somit kann das Ergebnis dimensionslos dargestellt werden

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{kL}{2mg}} = 1 + \frac{kL}{4mg}, \tag{9}$$

wobei die Wurzel zu $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$ für kleine Werte von x genähert wurde.

1.2 Schwingender Waagebalken mit Feder

Ein dünner ausbalancierter Waagebalken mit Masse m und Länge L werde über zwei Federn mit dem besten Boden verbunden. Die beiden gleichen Federn (Federkonstante k) seien symmetrisch im Abstand b vom Zentrum der Waage angebracht und vertikal ausgerichtet.



a) Welches Rückstellende Drehmoment M wirkt, wenn der Balken um einen kleinen Winkel α gekippt wird? Geben Sie einen Näherungsausdruck an, der linear in α ist.

b) Wie hängt die Winkelbeschleunigung $\ddot{\alpha}$ mit dem kleinen Winkel α zusammen?

c) Welche Schwingungsperiode T hat die Kippschwingung des Balkens?

d) Für die Anordnung seien Zahlenwerte $m = 2\,\mathrm{kg}$, $L = 80\,\mathrm{cm}$ und $b = 20\,\mathrm{cm}$ gegeben. Für die Schwingungsperiode werde $T = 0,3\,\mathrm{s}$ gemessen. Was ergibt sich hieraus für die Federkonstante k?

Lösung

a) Wenn der Balken um einen kleinen Winkel α gekippt wird eine Feder um den Betrag $\Delta l = b \tan\alpha \approx \alpha$ gedehnt, die andere um genau den gleichen Betrag gestaucht. Dadurch ergibt sich jeweils eine Rückstellkraft $F_k = -kb\alpha$. Für das Drehmoment welches auf die Waage wirkt finden wir somit

$$M = 2F \cdot b = -2kb^2 \cdot \alpha. \tag{10}$$

b) Um die Winkelbeschleunigung $\ddot{\alpha}$ zu bestimmen wird die Bewegungsgleichung aufgestellt. Aus

$$M = I\ddot{\alpha} \tag{11}$$

und dem Trägheitsmoment des Balkens $I = \frac{1}{12}mL^2$ folgt

$$\ddot{\alpha} = -24\frac{k}{m}\left(\frac{b}{L}\right)^2 \cdot \alpha. \tag{12}$$

c) Wird die Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \cdot \alpha \tag{13}$$

geschrieben kann die Schwingungsfrequenz direkt abgelesen werde. Aus dieser folgt die Schwingungsperiode

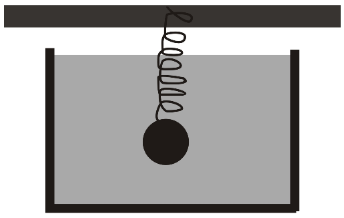
$$\omega = 2\sqrt{\frac{6k}{m}} \cdot \frac{b}{L} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{6k}} \cdot \frac{L}{b}. \tag{14}$$

d) Umformen der Schwingungsperiode nach k liefert

$$T^2 = \pi^2 \frac{m}{6k}\frac{L^2}{b^2} \rightarrow k = \frac{m}{6}\left(\frac{\pi L}{Tb}\right)^2 = 374\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{15}$$

1.3 Gedämpfter Oszillator

Eine Kugel mit Radius r und Dichte ρ_{Kugel} hängt an einer Feder im Bad, welches mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Die Flüssigkeit hat eine Dichte ρ_{Fluid}, Zähigkeit η und die Feder eine Federkonstante k.



a) Berechnen Sie die Gesamtkraft und bestimmen Sie daraus die Differentialgleichung (DGL) für die Beschleunigung der Kugel. Verwende $2\gamma := 6\pi\eta r/m$ und $\omega_0^2 := k/m$.

b) Verwenden Sie für die Lösung der homogenen DGL folgenden Ansatz: $A \cdot e^{-\lambda t}$. Bestimmen Sie die Konstante λ und daraus die Lösung für den Fall $\omega_0 \geq \gamma$ gilt. Hinweis: Durch Verwendung der Euler'schen Formel kann $A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}$ auch in der Form $C \cdot \sin(\omega t) + D \cdot \cos(\omega t)$ geschrieben werden, C und D sind beliebige reelle Zahlen.

c) Für eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung soll eine konstante Funktion angenommen werden. Wie lautet un die gesamte Lösung der DGL?

d) Nehmen Sie nun $\rho_{Fluid} = \rho_{Kugel}$ (inhomogener Teil der DGL fällt dadurch weg) an und bestimme die Konstanten durch die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

Lösung

a) Auf die Kugel wirkt die Gewichtskraft $F_G = mg = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{Kugel} g$, die Auftriebkraft $F_A = -\frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{Fluid} g$, die Federkraft $F_k = -kx$ und die Reibung durch die Flüssigkeit $F_R = -6\pi\eta r\dot{x}$

$$F_{ges} = m\ddot{x} = F_G + F_A + F_k + F_R. \tag{16}$$

Dies kann zur üblichen Form der Differentialgleichung für x umgeformt werden

$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \left(1 - \frac{\rho_{Fluid}}{\rho_{Kugel}}\right) g, \tag{17}$$

wobei $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{Kugel}$. Dies ist eine inhomogenen DGL mit Reibungsterm.

b) Der homogenen Teil der DGL lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{18}$$

Einsetzten des Ansatzes aus der Angabe liefert die Bestimmungsgleichung für die Konstante λ

$$\lambda^2 - 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \to \lambda_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{19}$$

Es ergeben sich drei mögliche Fälle:

1. $\omega_0 < \gamma$: Kriechfall
   Der Term unter der Wurzel ist positiv, somit ist die Wurzel reell und λ ebenfalls. Die Bewegung ist rein exponentiell abfallend

$$x(t) = A_1 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \tag{20}$$

2. $\omega_0 = \gamma$: Aperiodischer Grenzfall
   Die Wurzel fällt weg. Es gibt nur eine Lösung, ein exponentieller Abfall

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}, \tag{21}$$

3. $\omega_0 > \gamma$: Schwingfall
   Der Term unter der Wurzel ist negativ, die Wurzel wird rein imaginär und λ komplex. Der reelle Teil von λ bewirkt einen exponentiellen Abfall, aber der komplexe Teil von λ führt zu einem Schwingverhalten, welches durch Verwenden der Euler'schen Formel ersichtlich wird

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \right) = e^{-\gamma t} \left(B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos \omega t \right), \tag{22}$$

   wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und B_1 und B_2 aus den Konstanten A_1 und A_2 folgen.

c) Um den inhomogenen Teil der DGL zu lösen wird der Ansatz der rechten Seite verwendet. Da die Inhomogenität konstant ist wird als Ansatz eine Konstante gewählt

$$x_{part}(t) = C = const. \tag{23}$$

Einsetzten in die DGL liefert

$$\omega_0^2 C = \left(1 - \frac{\rho_{Fluid}}{\rho_{Kugel}} \right) g \tag{24}$$

Es folgt, dass

$$C = \left(1 - \frac{\rho_{Fluid}}{\rho_{Kugel}} \right) \frac{g}{\omega_0^2}. \tag{25}$$

Die gesamte Lösung der DGL setzt sich als Summe der homogenen und der partikulär Lösung zusammen.

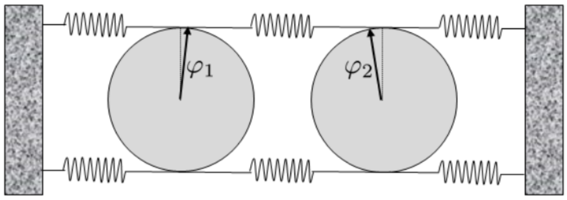
d) Im Folgenden wird angenommen, dass $\rho_{Fluid} = \rho_{Kugel}$ und dass $\omega_0 > \gamma$, so dass das System schwingt. Durch Einsetzen der Lösung in die Anfangsbedingungen können die Konstanten B_1 und B_2 bestimmt werden

$$x(0) = B_2 = 0 \tag{26}$$

$$\dot{x}(0) = \omega B_1 = v_0 \to B_1 = \frac{v_0}{\omega}. \tag{27}$$

1.4 Oszillation gekoppelter Drehscheiben

Zwei Drehscheiben (Masse m, Radius r) werden durch sechs gleiche Federn (Federkonstante k) festgehalten. Die Federn verbinden dabei den Rand der Scheiben mit den Wänden und üben auf die Scheiben Kräfte in tangentialer Richtung aus. Wir beschränken uns auf kleine Winkelauslenkungen $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$ aus der Gleichgewichtslage.



a) Welche Drehmomente M_1 und M_2 wirken auf die beiden Scheiben?

b) Führen Sie die Koordinaten $\Phi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ und $\delta\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ ein, Wie lauten damit die Bewegungsgleichungen für das System für gleichphasige Schwingung ($\varphi_1 = \varphi_2$) und für die gegenphasige Schwingung ($\varphi_1 = -\varphi_2$)?

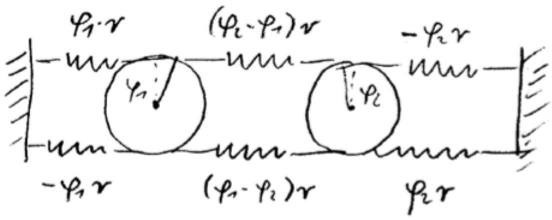
c) Welche Frequenzen ω_a und ω_b haben die gleich- bzw. gegenphasige Schwingung?

d) Nun seinen die Zahlenwerte $m = 1\,\mathrm{kg}$, $r = 10\,\mathrm{cm}$ und $k = 200\,\mathrm{N/m}$ gegeben, Berechnen Sie die Periodendauer T_b der gegenphasigen Schwingung.

Hinweis: Trägheitsmoment einer Scheibe bzgl. der Symmetrieachse $I = \frac{1}{12}mr^2$.

Lösung

Für kleine Winkel $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$ ergeben sich folgende Auslenkungen der Federn (siehe Skizze).



a) Drehmomente ergeben sich aus den Kräften, die die Federn auf die Scheiben ausrichten. Der Angriffspunkt ist jeweils $x = r\cos\varphi \approx r$ von den Mittelpunkten der Scheiben entfernt. Da sich Drehmomente, ebenso wie Kräfte additiv verhalten ergibt sich

$$M_1 = -2kr^2\varphi_1 - 2kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{28}$$

$$M_2 = 2kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) - 2kr^2\varphi_2. \tag{29}$$

b) Für die Bewegungsgleichungen wird verwendet, dass

$$M_1 = I\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1 \tag{30}$$

$$M_2 = I\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2. \tag{31}$$

Daraus folgen die Bewegungsgleichungen für φ_1 und φ_2

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{4k}{m}\varphi_1 - \frac{4k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{32}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{4k}{m}\varphi_2 + \frac{4k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{33}$$

Diese beiden Bewegungsgleichungen sind offensichtlich gekoppelt. Um die beiden Gleichungen zu entkoppeln werden neue Variablen wie in der Angabe eingeführt $\Phi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\delta\phi = \varphi_1 - \varphi_2$.
Die Bewegungsgleichungen für diese Variablen folgen aus Summe bzw. Differenz der Gleichungen für φ_1 und φ_2

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2\right) = -\frac{4k}{m}\Phi \tag{34}$$

$$\delta\ddot{\phi} = \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = -\frac{12k}{m}\delta\phi. \tag{35}$$

Für gleichphasige Schwingung gilt, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ und somit

$$\ddot{\Phi} = -\frac{4k}{m}\Phi \to \ddot{\varphi}_1 = -\frac{4k}{m}\varphi_1 \tag{36}$$

$$\delta\phi = 0 \to \delta\ddot{\phi} = 0. \tag{37}$$

Analog folgt für die gegenphasige Schwingung ($\varphi_1 = -\varphi_2$)

$$\Phi = 0 \to \ddot{\Phi} = 0 \tag{38}$$

$$\delta\ddot{\phi} = -\frac{12k}{m}\delta\phi \to \ddot{\varphi}_1 = -\frac{12k}{m}\varphi_1. \tag{39}$$

c) Die Schwingungsfrequenzen können leicht aus den jeweiligen Bewegungsgleichungen abgelesen werden

$$\omega_a = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{40}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{12k}{m}} = \sqrt{3}\omega_a. \tag{41}$$

d) Für die Schwingungsperiode folgt

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,181\,\mathrm{s}. \tag{42}$$

1.5 Wellengleichung

Gegeben sei die Wellengleichung für die Ausbreitung einer Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit c

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0. \tag{43}$$

a) Zeigen Sie, dass $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, wobei A, k und ω Konstanten sind, die Wellengleichung löst. Welche Zusammenhang besteht zwischen k, ω und c?

b) Wie hängen ω und k mit der Wellenlänge λ zusammen?

Nun werden zwei separate Wellen betrachtet $y_1(x,t) = \sin(k_1x - \omega_1t + \phi)$ und $y_2(x,t) = \sin(k_2x - \omega_2t)$, wobei ϕ eine Konstante unabhängig von t und x ist. Beide lösen die Wellengleichung (43) (Kann durch eine einfache Rechnung nachgewiesen werden!). Beide Wellen überlagern sich nun $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.

c) Warum löst auch die Welle $y(x,t)$ die Wellengleichung?

d) Zunächst wird der Fall betrachtet, dass $k_1 = k_2 = k$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und zum einen $\phi = 0$, zum anderen $\phi = \pi$. Leiten Sie eine einfache Form der Welle $y(x,t)$ her, d.h bringen Sie die Welle in die Form $y(x,t) = A\sin(k_{total}x - \omega_{total}t) + B\cos(k_{total}x - \omega_{total}t)$.

e) Nun wird $\phi = 0$ gesetzt. Die Wellenzahlen und Frequenzen der beiden Ausgangswellen unterscheiden sich nun etwas. Welche Form hat die Welle $y(x,t)$ jetzt?

Lösung

a) Zunächst berechnen wir die benötigten zweiten Ableitungen der Lösung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = -A\omega^2 e^{i(kx-\omega t)} = -\omega^2 y(x,t) \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = -Ak^2 e^{i(kx-\omega t)} = -k^2 y(x,t). \tag{45}$$

Nach Einsetzen in die Wellengleichung erhalten wir die Folgende Gleichung

$$\omega^2 - c^2k^2 = 0 \to c = \pm\frac{\omega}{k}. \tag{46}$$

b) Die Wellenzahl k ist abhängig von der Wellenlänge λ

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{47}$$

Hieraus kann mit der Ergebnis aus Teilaufgabe a) auch ein Zusammenhang zu $\omega = 2\pi f$ hergeleitet werden, wobei f die Frequenz der Welle ist

$$\omega = \pm ck = \frac{2\pi c}{\lambda} \to f = \frac{c}{k}. \tag{48}$$

c) Die Wellengleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung, d.h sind $y_1(x,t)$ und $y_2(x,t)$ Lösungen der Wellengleichung ist auch jede Linearkombination dieser beiden Funktionen eine Lösung der Wellengleichung.

d) Für $\phi = 0$ ergibt sich folgende einfache Form

$$y(x,t) = \sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t) = 2\sin(kx - \omega t). \tag{49}$$

Die resultierende Welle hat also die gleiche Wellenzahl und die gleiche Frequenz wie die beiden Ausgangswellen, aber die Amplitude ist doppelt so groß.
Für den Fall $\phi = \pi$ können das Additionstheorem für $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ angewendet werden. Für die Welle 1 folgt

$$y_1(x,t) = \sin(kx-\omega t+\pi) = \sin(kx-\omega t)\cos(\pi)+\cos(kx-\omega t)\sin(\pi) = -\sin(kx-\omega t), \tag{50}$$

da $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = +1$. Somit löscht sich die resultierende Welle aus

$$y(x,t) = -\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t) = 0. \tag{51}$$

Die beiden Fälle werden als konstruktive ($\phi = 0$) und destruktive ($\phi = \pi$) bezeichnet.

e) Für den Fall, dass $\phi = 0$, aber $k_1 \neq k_2$ und $\omega_1 \neq \omega_2$ kann ein Additionstheorem angewendet werden

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{52}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2 \sin\left(\frac{(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t}{2}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

Dies wird als Schwebung bezeichnet. Der Sinus-förmige Teil hat eine kleine Wellenlänge $\lambda_{\text{sin}} = \frac{4\pi}{k_1+k_2}$ und eine hohe Frequenz $\omega_{\text{sin}} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ und wird als Trägerwelle bezeichnet. Der Kosinus-förmige Teil hat eine große Wellenlänge $\lambda_{\text{cos}} = \frac{4\pi}{k_1-k_2}$ und eine kleine Frequenz $\omega_{\text{cos}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ und wird als Einhüllende der Welle bezeichnet.