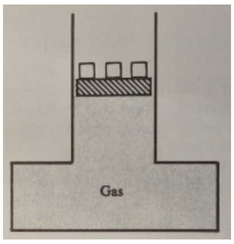
Ferienkurs Experimentalphysik 1

Übungsblatt 3: Lösung

Tutoren: Elena Kaiser und Gloria Isbrandt

1 Hydrostatik, Hydrodynamik

1.1 Druck im Tank



a) Wie in der Abbildung dargestellt hält ein Kolben, der mit Gewichten beschwert wurde, Gas in einem Tank. Der Kolben und die Gewichte haben zusammen eine Masse von 20 kg. Die Oberfläche der Kolbens ist $8\,\mathrm{cm}^2$. Was ist der totale Druck des Gases im Tank? Was würde ein gewöhnliches Manometer (Druckmessgerät) anzeigen?
(*Der Atmosphärendruck beträgt* $100\,kPa$)

b) Nehme nun an, dass der Boden des Tanks eine Oberfläche von $20\,\mathrm{cm}^2$ besitzt. Bestimme die gesamte Kraft, die auf den Boden des Tanks wirkt, und vergleiche sie mit dem Gewicht des Kolbens und der Kraft der Atmosphäre auf dem Kolben. Wie erklärst du dir dieses Ergebnis?

Lösung

a) Der totale Druck entspricht dem Atmosphärendruck plus dem Druck, der durch das Gewicht der Kolben verursacht wird

$$p = 1 \cdot 10^5 \tfrac{N}{m^2} + \tfrac{20 \cdot 9{,}81 N}{8 \cdot 10^{-4} m^2} = 3{,}45 \cdot 10^5\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 345\,\mathrm{kPa}.$$

Ein gewöhnliches Manometer würde den Unterschied zwischen Innendruck und Außendruck wiedergeben. Somit würde es $\frac{20 \cdot 9{,}81}{8 \cdot 10^{-4}}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 245\,\mathrm{kPa}$ anzeigen.

b) Aus Aufgabe a) weiß man, dass der Druck auf die Tank-Wände $p = 345\,\mathrm{kPa}$ wirkt. Aus $F = p \cdot A$ erhält man:

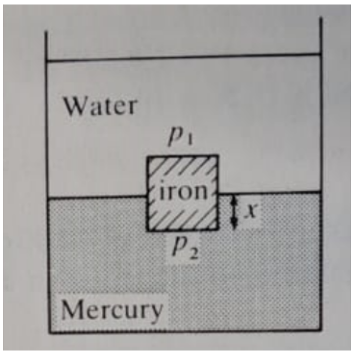
$$F = pA = 345 \cdot 10^3\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0{,}002\,\mathrm{m}^2 = 690\,\mathrm{N}.$$

Die Gewichtskraft des Kolbens (plus Gewichte) ist $20 \cdot 9,81\,\mathrm{N} = 196\,\mathrm{N}$.
Die Kraft die von der Atmosphäre noch auf den Kolben wirkt ist $1 \cdot 10^5 \cdot 0,0008\tilde{}, \mathrm{N} = 80\,\mathrm{N}$. Diese summieren sich auf $276\,\mathrm{N}$ auf.

Die Kraft auf den Boden des Tanks ist um einiges mehr, als jene nötig den Kolben zu halten während die Atmosphäre ihn nach unten drückt. Diese zusätzliche Kraft auf den Boden des Tanks kann so erklärt werden, dass auch das restliche Gas, welches sich nicht direkt unterhalb des Kolbenschafts befindet, durch die Kompression eine Kraft nach unten ausübt. Diese Kraft entspricht genau $F = p \cdot A'$ wobei A' die Fläche des Bodens minus der Kolbenoberfläche ist; $A' = (20 - 8)\,\mathrm{cm}^2 = 12\,\mathrm{cm}^2$. Also ist $F = p \cdot A' = 345\,\mathrm{kPa} \cdot 0,0012\,\mathrm{m}^2 = 414\,\mathrm{N}$, was genau die fehlende Kraftkomponente ist.

1.2 Wasser- und Quecksilberbad

Ein Gefäß ist gefüllt mit Quecksilber und Wasser darüber. Ein Würfel aus Eisen, 60 mm lang auf jeder Seite, sitzt im Gleichgewicht irgendwo zwischen den Flüssigkeiten. Finde heraus, wie viel des Würfels in jede Flüssigkeit getaucht ist. ($\rho_{Eisen} = 7,7 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und $\rho_{Quecksilber} = 13,6 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$)



Lösung

Sei x gleich der in Quecksilber eingetauchten Länge des Würfels. Dann ist der Würfel $0,06\,\mathrm{m} - x$ in Wasser eingetaucht. Die netto Kraft, die senkrecht auf den Würfel aufgrund der Flüssigkeiten wirkt ist $p_2 A - p_1 A$, wobei p_2, p_1 der Druck auf der Unterseite und der Oberseite des Würfels ist (siehe Abbildung). A sei die Oberfläche einer Würfelseite. Für das Gleichgewicht muss die Gewichtskraft des Würfels der senkrecht wirkenden Kraft sein: $F_G = p_2 A - p_1 A = (p_2 - p_1)A$. Die Druckdifferenz ist $p_2 - p_1 = \rho_W g(0,06 - x) + \rho_{Hg} g x$. [Anmerkung: Analog kann argumentiert werden, dass die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit gleich der Gewichtskraft des Eisenwürfels ist. Die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist $F_{Fl} = m_{Fl} g = \rho_{Fl} \cdot A \cdot h \cdot g$, wobei h die Eindringtiefe des Würfels ist.)]
Die Gleichung kann nun für x gelöst werden, wobei die Gewichtskraft des Eisenwürfels $F_G = m_{Eisen} g = \rho_{Eisen} \cdot g \cdot V_{Würfel}$ ist. Man kann die Gleichung durch g teilen und erhält

$$7,7 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (0,06\,\mathrm{m})^3 = 1,0 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (0,06\,\mathrm{m} - x) \cdot (0,06\,\mathrm{m})^2 + 13,6 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot x \cdot (0,06\,\mathrm{m})^2$$
$$\rightarrow 7,7 \cdot 0,06 = (0,06 - x) + 13,6x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0,032\,\mathrm{mm}..$$

Der Eisenwürfel ist also 32 mm in Quecksilber eingetaucht und 28 mm tief im Wasser.

1.3 Auftrieb

a) Ein Holzblock wiegt $71,2\,\mathrm{N}$ und besitzt eine relative Dichte von $0,75$. Der Block ist mit einem Seil an Grund eines Wassertanks befestigt, sodass es vollkommen unter Wasser ist. Was ist die Kraft, die auf das Seil wirkt?
(*Die dimensionslose Größe der relativen Dichte beschreibt das Verhältnis der Dichte eines Materials zur Dichte des Mediums, in dem es sich befindet.*)

b) Ein Metallball wiegt $0,096\,\mathrm{N}$. Wenn der Ball in Wasser getaucht ist hat er ein Gewicht von $0,071\,\mathrm{N}$. Berechne die Dichte des Metallballs.

c) Ein Block eines Materials hat eine Dichte von ρ_1 und schwebt in einer Flüssigkeit mit unbekannter Dichte, in die es zu zwei Dritteln getaucht ist. Zeige, dass die Dichte der unbekannten Flüssigkeit gegeben ist durch $\rho_2 = \frac{4}{3}\rho_1$.

d) Die Dichte von Eis ist $917\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und die ungefähre Dichte von Meerwasser, in dem ein Eisberg schwebt ist $1025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Wie viel Prozent des Eisbergs ist unter der Wasseroberfläche?

Lösung

a) Der Block ist im Gleichgewicht unter dem Einfluss von drei Kräften: der Gewichtskraft $F_G = 71,2\,\mathrm{N}$, der Seilkraft F_S und die Auftriebskraft F_A, mit $F_A = F_G + F_S$. Die Auftriebskraft kann bestimmt werden mit $F_A = \rho_W \cdot g \cdot V_B$, wobei ρ_W die Dichte von Wasser ist und V_B das Volumen des Holzblockes ist.
$F_G = \rho_B \cdot g \cdot V_B$, wobei ρ_B die Dichte des Blockes ist. Es gilt dann $\frac{F_G}{F_A} = \frac{\rho_B}{\rho_W} =$ relative Dichte $= 0,75$; also ist $F_A = \frac{F_G}{0{,}75} = 94,9\,\mathrm{N}$. Schließlich kann aus der Gleichgewichtsgleichung gefolgert werden $94,9N = 71,2\,\mathrm{N} + F_S$; oder $F_S = 23,7\,\mathrm{N}$.

b) Die gesuchte Dichte ist gegeben durch $\rho = \frac{m}{V}$. Das Volumen V des Balls ist aber genauso das Volumen des verdrängten Wasser, wodurch die Auftriebskraft gegeben ist durch $F_A = \rho_W \cdot g \cdot V$

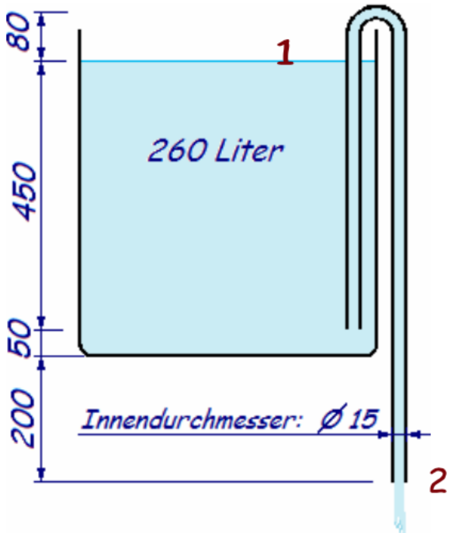
$$\rho = \frac{mg\rho_W}{F_A} = \frac{0{,}096\,\mathrm{N}\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{0{,}096\,\mathrm{N} - 0{,}071\,\mathrm{N}} = 3840\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

c) Nach dem Archimedischen Prinzip gilt $\rho_1 \cdot V \cdot g = \rho_2 \frac{3}{4} V \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad \rho_2 = \frac{4}{3}\rho_1$.

d) Dach Aufgabe c) ist das Verhältnis zwischen untergetauchten Volumen proportional zu den Dichten: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,89 \Rightarrow 89\%$.

1.4 Wasserbehälter

Aus einem Wasserbehölter wird mit Hilfe eines umgestülpten U-Rohres Wasser entnommen (siehe Skizze, Längenabgaben in mm).



a) Wieso läuft dabei das Wasser ohne Hilfe einer Pumpe zuerst 80 mm nach oben?

b) Wie viel Wasser läuft innerhalb einer Minute aus dem Behälter heraus? (Reibungsverluste ignorieren)

Lösung

a) Im rechten Fallrohr ist unten am Austritt des Wassers der Druck Null bzw. gleich dem Luftdruck; deshalb liegt der Druck im Rohr unterhalb des Luftdruckes. Der Luftdruck der auf der Wasseroberfläche lastet, drückt das Wasser in den Unterdruckbereich hinein.

b) Punkt 1 befindet sich 0,7 m über Punkt 2. Dort kann der Fluss des Wassers aufgrund der Größe des Wasserbehälters vernachlässigt werden, somit ist $v_1 = 0$. Der Druck an beiden Punkten entspricht dem Luftdruck $p_1 = p_2$. Einsetzen in die Bernoulli-Gleichung und kürzen

$$\begin{aligned} \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 &= \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 \\ \rho g h &= \frac{\rho}{2} v_2^2, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei ρ die Dichte des Wassers ist. Umformen nach v_2 liefert

$$v_2 = \sqrt{2 g h_1} = 3,74\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{2}$$

Das Volumen, welches pro Zeiteinheit durch das Rohr fließt berechnet sich so zu

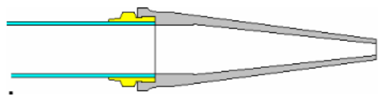
$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \Delta x}{\Delta t} = A \cdot v = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot v = 0,661\,\frac{\mathrm{dm}^3}{\mathrm{s}}. \tag{3}$$

Das Volumen, das pro Minute durch das Rohr abfließt berechnet sich somit zu

$$\Delta V = \dot{V} \Delta t = 89,7\,\mathrm{l}. \tag{4}$$

1.5 Feuerwehr

Fried Flotts Freundinnen von der Freuwilligen Feuerwehr Frauenberg freuen sich endlich das neue Strahlrohr auszuprobieren. Sie schließen dazu einen Schlauch ($d_{Schlauch} = 52\,\mathrm{mm}$) an eine Pumpe und an das Strahlrohr, dessen Mundstück einen Durchmesser $d_{Rohr} = 9\,\mathrm{mm}$ hat, an. Es ergibt sich eine Durchflussmenge von 140 Litern pro Minute.



a) Wie hoch ist der Druck unmittelbar vor dem Strahlrohr? (Die Verluste im Strahlrohr können vernachlässigt werden, Längenausdehnung des Strahlrohr ebenfalls vernachlässigen)

b) Wie hoch könnte Florentine am Strahlrohr spritzen, wenn keine Verwirbelung in der Luft stattfände?

Lösung

Punkt 1 bezeichnet den Punkt direkt vor Eintritt in das Strahlrohr, Punkt 2 den Punkt direkt nach Austritt aus dem Strahlrohr und Punkt 3, den Punkt an dem das Wasser maximal gelangt. Zunächst müssen die Flussgeschwindigkeiten an den Punkten 1 und 2 bestimmt werden. Hierzu wird die Kontinuitätsgleichung verwendet

$$\dot{V} = A \cdot v = const., \tag{5}$$

wobei $\dot{V}$ die Wassermenge bezeichnet, welche pro Zeiteinheit fließt, A ist die Fläche durch welche das Wasser fließt und v die Flussgeschwindigkeit. Mit den Angaben aus der Aufgabenstellung ergeben sich

$$v_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{4\dot{V}}{d_{Rohr}^2 \pi} = 1,10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{6}$$

$$v_2 = 36,68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{7}$$

a) Zur Bestimmung des Druckes p_1 (abzüglich des Atmosphärendruckes) direkt vor Eingang in das Strahlrohr wird die Bernoulli-Gleichung verwendet

$$\begin{aligned}\rho g h_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 &= \rho g h_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 \\ \frac{\rho}{2}v_1^2 + p_1 &= \frac{\rho}{2}v_2^2,\end{aligned} \tag{8}$$

wobei verwendet wurde, dass $h_1 = h_2$ und p_2 der Atmosphärendruck ist, der hier gleich Null gesetzt werden kann.Die Dichte von Wasser ist $\rho = 1 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Somit berechnet sich der Druck p_1 zu

$$p_1 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 6,72 \cdot 10^5 \,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 6,72\,\mathrm{bar}. \tag{9}$$

b) Analog zu Teilaufgabe a) kann auch hier die Bernoulli-Gleichung angewendet werden. Am besten eignet sich hierfür Punkt 2, da hier der gleich Druck wie an Punkt 3 herrscht

$$\begin{aligned}\rho g h_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + p_2 &= \rho g h_3 + \frac{\rho}{2}v_3^2 + p_3 \\ \frac{\rho}{2}v_2^2 &= \rho g h_3,\end{aligned} \tag{10}$$

denn an Punkt 3 hat das Wasser die Flussgeschwindigkeit Null. Umgeformt nach h_3 ergibt dies

$$h_3 = \frac{v_2^2}{2g} = 67,3\,\mathrm{m}. \tag{11}$$

1.6 Reynoldszahl des Blutes

Das Blut eines Joggers hat eine Viskosität von $\eta = 2,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$, eine Dichte von $\rho = 1,05 \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und fließt in der Aorta ($d = 10\,\mathrm{mm}$ Innendurchmesser) mit einer Geschwindigkeit von $v = 60 \,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$.

a) Fließt das Blut laminar?

b) Welchen Einfluss hat eine Arterienverkalkung auf das Ergebnis?

Lösung

a) Die Reynoldszahl ist ein Indikator dafür ob eine Flüssigkeit laminar oder turbulent durch ein Rohr fließt. Die Grenze wird bei etwa $Re_{krit} \approx 2320$ angesetzt.
Das Blut des Joggers hat eine Reynoldszahl von

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{vd\rho}{\eta} = 2520 > Re_{krit}. \tag{12}$$

Das Blut fließt in diesem Fall also turbulent.

b) Bei einer Arterienverkalkung sollte sich Re naiv betrachtet reduzieren, denn d wird kleiner. Allerdings kann die Flussgeschwindigkeit erhöht sein und dem entgegenwirken. Es ist also nicht sicher, ob sich die Reynoldszahl verringert.

1.7 Archimedes Haar

Ein menschliches Haar habe ein Elastizitätsmodul von $E = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{Nm}^{-2}$. Nehmen Sie an, dass sich das Haar für Dehnungen bis zu 10% elastisch dehnt und nicht beschädigt wird.

a) Berechnen Sie das Volumen an Haar, dass Archimedes 250 B.C. für ein Katapult benötigte, um einen Fels von 50 kg auf eine Geschwindigkeit von $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu beschleunigen.

b) Wie weit fliegt dieser Fels unter idealen Bedingungen maximal?

Lösung

a) Es ist das Volumen an Haar für ein einfaches Katapult bei gegebenem Elastizitätsmodul und Dehnung von $\frac{\Delta l}{l} = 10\%$ gesucht.

Aus dem Hooke'schen Gesetz ($\sigma = E\epsilon$) folgt $\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$ bzw. $F = \frac{EA}{l}\Delta l$

Es gilt $F = kx$ mit $k = \frac{EA}{l}$, $x = \Delta l$ mit dem Energieerhaltungssatz und Äquivalenzumformungen

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\Delta l^2 = \frac{1}{2}EAl\frac{\Delta l^2}{l^2} = \frac{1}{2}EV\frac{\Delta l^2}{l^2} \tag{14}$$

$$\Rightarrow V = \frac{mv^2 l^2}{E\Delta l^2} = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}. \tag{15}$$

b) Es ist die maximale Wurfweite bei optimalen Bedingungen gefragt. Es ist bekannt, dass die geworfene Weite bei $\varphi = 45°$ maximal wird (Luftwiderstand vernachlässigt).

$$x_{\max} = \frac{v^2}{g}\sin 2\varphi = \frac{v^2}{g} = 40,77\,\mathrm{m}. \tag{16}$$

1.8 Gespannter Draht

Ein Draht der ursprünglichen Länge $l_0 = 15$ m ist an einem Ende befestigt und wird an seinem anderen Ende mit einer Kraft von $F = 300$ N in Längsrichtung gespannt, wobei er eine Längenänderung von $\Delta l = 0,6$ cm erfährt. Wie groß ist der Durchmesser dieses Drahtes im gespannten und ungespanntem Zustand, wenn das Drahtmaterial einen Elastizitätsmodul $E = 200$ GPa und einen Schubmodul $G = 75$ GPa hat?

Lösung

Die Dehnung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ des Drahtes berechnet sich über das Hooke'sche Gesetz mithilfe der Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$ und dem Elastizitätsmodul E:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l_0} \tag{17}$$

Dabei ist A die noch unbekannte Querschnittsfläche des Drahtes. Diese ergibt sich für einen Draht mit dem Durchmesser d_0 (ungedehnt) aus obiger Gleichung durch Umstellen zu

$$A = \pi\frac{d_0^2}{4} = F\frac{l_0}{E\Delta l} \tag{18}$$

Der gesuchte (Anfangs-)Durchmesser ist also

$$d_0 = 2\sqrt{F\frac{l_0}{\pi E \Delta l}}. \tag{19}$$

Die Querkontraktion, speziell hier die Verkleinerung des Durchmessers Δd, wird mit der Poisson-Konstante μ beschrieben. Deren Definition lautet

$$\mu = \frac{\frac{\Delta d}{d_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}}. \tag{20}$$

Die Poisson-Konstante hängt bei isotropem Material mit deren Modulen zusammen nach

$$E = 2G(1+\mu), \text{ bzw. } \mu = \frac{E}{2G} - 1. \tag{21}$$

Das eingesetzt in die obere Definition von μ, umgeordnet und d_0 eingesetzt, ergibt schließlich

$$\Delta d = d_0 \frac{\Delta l}{l_0} \cdot (\frac{E}{2G} - 1) = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot (\frac{E}{2G} - 1) \cdot 2\sqrt{F\frac{l_0}{\pi E \Delta l}} = 2\sqrt{F\frac{\Delta l}{\pi E l_0}}(\frac{E}{2G} - 1). \tag{22}$$

Mit den Zahlenwerten der Aufgabenstellung ergibt sich

$$d_0 = 2,185 \text{ mm, bzw. } \Delta d = 0,29\ \mu\text{m}. \tag{23}$$