Ferienkurs Experimentalphysik 1

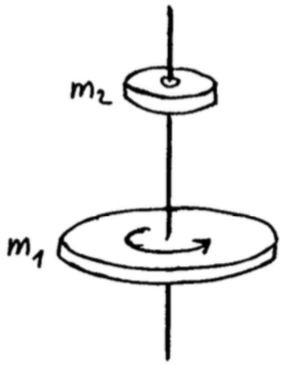
Übungsblatt 2: Lösung

Tutoren: Elena KAISER und Gloria ISBRANDT

1 Stöße und starre Körper

1.1 Zwei rotierende Scheiben

Eine kreisrunde Scheibe (Radius r_1, Masse m_1) sei starr mit einer reibungsfrei gelagerten (masselosen) Achse verbunden und rotiere frei mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Eine zweite Scheibe (Radius r_2, Masse m_2), die sich anfänglich in Ruhe befindet, werde nun so fallen gelassen, dass sie auf der ersten Scheibe konzentrisch liegen bleibt. Durch die auftretende Reibung rotieren beide Scheiben bald gemeinsam.



a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω, die sich für die beiden rotierenden Scheiben ergibt?

b) Welche Analogie besteht zum inelatischen Stoß?

Lösung

a) Eine rotierende Scheibe hat einen Drehimpuls von

$$L = I \cdot \omega = \frac{1}{2}mr^2\omega, \tag{1}$$

wobei hier das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}mr^2$ einer Scheibe welche sich um eine Achse durch den Schwerpunkt welche senkrecht zur Scheibe steht verwendet wurde.
Für den in der Aufgabe beschriebenen Vorgang besteht Drehimpulserhaltung

$$L_{vor} = L_{nach}. \tag{2}$$

Vor den Stoß rotiert nur die Scheibe 1

$$L_{vor} = I_1\omega_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega. \tag{3}$$

Nach dem Stoße rotieren beide Scheiben mit gleicher Winkelgeschwindigkeit und das Gesamtträgheitsmoment setzt sich aus den beiden einzelnen Trägheitsmomenten zusammen

$$L_{nach} = (I_1 + I_2)\,\omega = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\omega \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen und Umformen ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_1 = \frac{m_1 r_1^2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}\omega_1 \tag{5}$$

b) Bei einem inelastischen Stoß geht ein Teil der kinetischen Energie in Wärme über so dass

$$E_{kin,vor} \neq E_{kin,nach}. \tag{6}$$

Auch in dem Vorgang aus der Aufgabe geht ein Teil der kinetische Energie in Wärme um. Allerdings muss hier nicht die kinetische Energie eine Translationsbewegung betrachtet werden sondern die Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{7}$$

In diesem Fall

$$E_{rot,vor} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{4}m_1 r_1^2 \omega_1^2 \tag{8}$$

$$E_{rot,nach} = \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)\omega^2. \tag{9}$$

Einsetzen von ω aus Teilaufgabe a) ergibt

$$E_{rot,nach} = \frac{1}{4}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\left[\frac{m_1 r_1^2}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}\right]^2 \omega_1^2 = \frac{1}{4}\frac{m_1^2 r_1^4}{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)}\omega_1^2 \neq E_{rot,vor}. \tag{10}$$

1.2 Weltraum

Für Kommunikation und Fernsehübertragung werden häufig geostationäre Satelliten verwendet. Dabei handelt es sich um Satelliten, die sich über dem Äquator befinden und sich in Richtung der Erdrotation bewegen. Die Umlaufdauer beträgt einen Tag. Von der Erde aus betrachtet scheint ein solcher Satellit am Himmel still zu stehen.

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen der Erdoberfläche und einen geostationären Satelliten.

b) Die ISS kreist in einer Höhe von 350 km über der Erdoberfläche. Bestimmen Sie die Umlaufdauer.

c) Wie groß ist die Erdanziehungskraft, die auf einen Astronauten mit einer Masse von 75 kg an Bord der ISS wirkt?

Lösung

a) Gegeben ist die Umlaufdauer von $T = 24\,\text{h}$. Hieraus kann die Winkelgeschwindigkeit zu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ berechnet werden. Damit sich der Satellit auf einer stabilen Umlaufbahn befindet muss ein Kräftegleichgewicht zwischen Gravitations- und Zentripetalkraft wirken

$$F_Z = F_G \Leftrightarrow m\omega^2 r = \frac{GmM_E}{r^2}, \tag{11}$$

wobei m die Masse des Satelliten, M_E die Erdmasse, G die Gravitationskonstante und r der Abstand zwischen Erdmittelpunkt und dem Satelliten sind. Umformen nach r und Einsetzen von ω ergibt

$$r = \left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42,2 \cdot 10^3\,\text{km}. \tag{12}$$

Um den Abstand zwischen Erdoberfläche und dem Satelliten zu bestimmen muss noch der Erdradius abgezogen werden

$$h = r - R_E = 35,9 \cdot 10^3\,\text{km}. \tag{13}$$

b) Auch hier gilt ein Kräftegleichgewicht

$$F_Z = F_G \Leftrightarrow m\omega^2(h' + R_E) = \frac{GmM_e}{(h' + R_E)^2} \tag{14}$$

UmFormen nach ω ergibt

$$\omega^2 = \frac{GM_E}{(h' + R_E)^3} \to \omega = ???. \tag{15}$$

Somit beträgt die Umlaufdauer der ISS

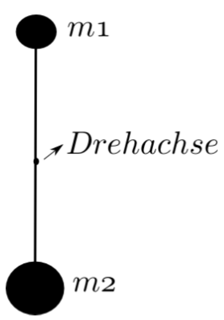
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = ???. \tag{16}$$

c) Einsetzen liefert

$$F_G = \frac{Gm_A M_E}{(h' + R_E)^2} = 6,6 \cdot 10^2\,\text{N} \tag{17}$$

1.3 Stahlpendel mit Kugeln

An den beiden Enden eines dünnen homogenen Stabes mit der Länge $L = 30\,\text{cm}$ und Masse $m_0 = 100\,\text{g}$ sind zwei homogene Kugeln aufgeklebt (siehe Skizze). Massen und Radien der Kugeln sind: $m_1 = 100\,\text{g}$, $m_2 = 300\,\text{g}$, $r_1 = 2\,\text{cm}$, $r_2 = 3\,\text{cm}$.
Der Stab ist genau in seiner Mitte ($L/2$) an einer horizontalen Drehachse fixiert.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment T_ges des Stabes + Kugeln bezüglich der Drehachse.

b) Wie weit von der Drehachse entfernt befindet sich der Schwerpunkt des Gesamtsystems?

c) Der Stab wird nun ein wenig aus der Vertikalen ausgelenkt und losgelassen, sodass er in Folge Schwingungen um die Ruhelage ausführt. Berechnen Sie die Periodendauer T der Schwingung.
Annahmen: kleine Auslenkungen, keine Reibung.

Lösung

a) Die Trägheitsmomente einer Kugel mit Drehachse durch den Schwerpunkt) berechnet sich zu

$$I_{Kugel} = \frac{2}{5mr^2} \tag{18}$$

und das eines Stabes mit Drehachse senkrecht zum Stab durch den Schwerpunkt zu

$$I_{Stab} = \frac{1}{12}ml^2. \tag{19}$$

Da im Stahlpendel die Kugeln nicht um eine Drehachse durch ihren jeweiligen Schwerpunkt rotieren muss der Satz von Steiner angewendet werden

$$I = I_0 + md^2, \tag{20}$$

wobei I das gesamte Trägheitsmoment, I_0 das Trägheitsmoment bei Drehung durch den Schwerpunkt und d der Abstand von Drehachse zu Schwerpunkt sind. Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich als Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Komponenten

$$I_{ges} = I_{Stab} + \left(I_{Kugel,1} + m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) + \left(I_{Kugel,2} + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = 9,9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^2. \tag{21}$$

b) Da die beiden Kugeln im gleichen Abstand vom Schwerpunkt des Stabes befestigt sind muss nur der Schwerpunkt der beiden Kugeln bestimmt werden um den Schwerpunkt des Gesamtsystems zu erhalten

$$R_S = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 - m_2)\frac{L}{2} = -7,5\,\mathrm{cm}. \tag{22}$$

Das bedeutet der Schwerpunkt ist um $7,5\,\mathrm{cm}$ in Richtung der Kugel 2 verschoben.

c) Zunächst muss die Schwingungsgleichung aufgestellt werden. Wird das System aus seiner Ruhelage ausgelenkt wirkt ein Drehmoment, welches sich aus der im Schwerpunkt angreifenden Gewichtskraft ergibt

$$M = m_{ges} g R_S \sin\phi. \tag{23}$$

Für kleine Auslenkungen kann die Kleinwinkelnäherung angewendet werden, so dass $\sin\phi = \phi$ gilt. Die Schwingungsgleichung lautet somit

$$I_{ges}\ddot{\phi} + m_{ges} g R_s \phi = 0. \tag{24}$$

Dies kann so umgestellt werden, dass die Winkelgeschwindigkeit direkt abgelesen werden kann

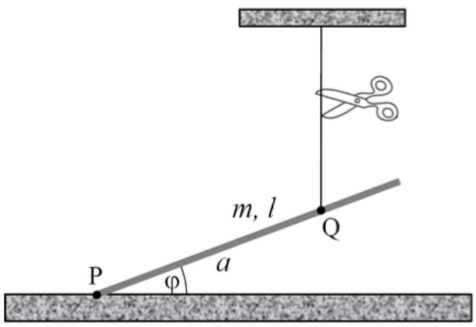
$$\ddot{\phi} = -\frac{m_g esgR_S}{I_{ges}}\phi = -\omega^2\phi \rightarrow \omega = 6,11\,\frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{25}$$

Das Stabpendel hat somit eine Schwingungsdauer von

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,03\,\mathrm{s}. \tag{26}$$

1.4 Eisenstange am Faden

Eine Eisenstange (Masse $m = 0,5\,\mathrm{kg}$, Länge $L = 80\,\mathrm{cm}$) befindet sich an der dargestellten Gleichgewichtsposition. Ihr unteres Ende liegt am Punkt P auf dem Erdboden auf, und die ist an einem Punkt Q (Strecke $a = 60\,\mathrm{cm}$ von P nach Q) zusätzlich an einem vertikalen Faden befestigt. Im Gleichgewicht bildet die Stange mit der Erdoberfläche eine Winkel von $\varphi = 20°$. Nun wird der Faden durchschnitten und die Stange kippt hinunter, wobei das untere Ende immer bei P bleibt.



a) Welche Spannkraft T hat der Faden in der Gleichgewichtssituation?

b) Welche gesamte kinetische Energie hat die Stange, wenn sie auf dem Boden auftrifft?

c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω dreht sich die Stange beim Auftreffen auf den Boden?

d) Welche maximale Schwerpunktenergie v_{SP} erreicht die Stange kurz vor dem Aufprall?

Lösung

a) Es gilt ein Drehmoment Gleichgewicht. Wird der Punkt P als Drehpunkt gewählt gilt

$$mg\frac{L}{2} = Ta \rightarrow T = \frac{mgL}{2a} = 3,27\,\mathrm{N}. \tag{27}$$

b) Es gilt Energieerhaltung: Die gesamte potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt. Zu Beginn liegt der Schwerpunkt des Stabes bei einer Höhe von $h = \frac{L}{2}\sin\varphi$ und somit

$$E_{pot} = mg\frac{L}{2}\sin\varphi = E_{kin} = 0,67\,\mathrm{J}. \tag{28}$$

c) Um die Winkelgeschwindigkeit ω zu bestimmen wird verwendet, dass die gesamte kinetische Energie als Rotationsenergie bezüglich der Drehachse P angenommen werden kann

$$E_{kin} = E_{rot} = \frac{1}{2} I_{ges}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4}\right)\omega^2 = E_{pot}. \tag{29}$$

Dies kann nach ω umgestellt werden

$$\omega^2 = 3g\sin\varphi\frac{1}{L} \rightarrow \omega = 3,55\,\frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{30}$$

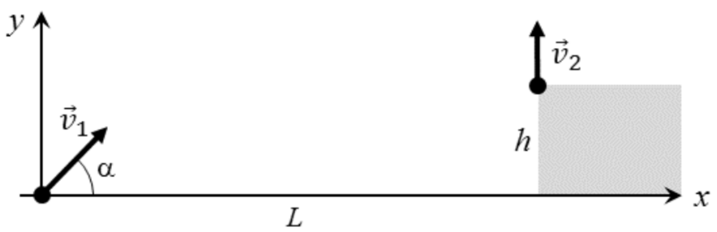
d) Sie Schwerpunktgeschwindigkeit kann zu

$$v_{SP} = \omega\frac{L}{2} = 1,42\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{31}$$

bestimmt werden.

1.5 Treffen Zweier Kugeln im Flug

Zwei Kugeln werden zeitgleich abgeschossen. Während die erste Kugel am Ursprung des Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit $v_1 = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ unter dem Anstellwinkel $\alpha = 45°$ startet, beginnt die zweite Kugel ihren Flug an einem $L = 50\,\mathrm{m}$ entfernten und $h = 10\,\mathrm{m}$ höher liegenden Punkt mit der vertikal nach oben gerichteten Anfangsgeschwindigkeit v_2. Die Kugeln stoßen währen des Fluges zusammen.



a) Nach welcher Zeit t_c erfolgt der Zusammenstoß?

b) Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit v_2 der zweiten Kugel?

Nun wird angenommen, dass die beiden Kugeln bleiben nach dem Stoß aneinander kleben bleiben. Beide Kugeln haben die gleiche Masse $m = 100\,\mathrm{g}$.

c) Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen sich die beiden Kugeln nach dem Stoß?

d) Wie viel Energie wird unmittelbar während des Stoßes in Wärme umgewandelt?

Lösung

Die Bahnkurven der beiden Kugeln vor dem Stoß sind gegeben durch

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} v_1\cos\alpha\cdot t \\ v_1\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} L \\ h + v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Die beiden Kugeln treffen aufeinander, wenn gilt

$$\vec{r}_1(t_c) = \vec{r}_2(t_c). \tag{34}$$

a) Um den Auftreffzeitpunkt t_c zu bestimmen, genügt es zunächst die x-Komponente zu betrachten

$$v_1 \cos\alpha \cdot t_c = L \to t_c = \frac{L}{v_1 \cos\alpha} = 1,768\,\mathrm{s}. \tag{35}$$

b) Zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit v_2 der zweiten Kugel werden die y-Komponenten verglichen

$$v_1 \sin\alpha \cdot t_c = h + v_2 t_c. \tag{36}$$

Durch Einsetzten von t_c aus Teilaufgabe a) und Umformen nach v_2 erhält man

$$v_2 = v_1 \left(\sin\alpha - \frac{h}{L} \cos\alpha \right) = 22,63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{37}$$

c) Es gilt Impulserhaltung

$$\vec{p}_{vor} = \vec{p}_{nach}, \tag{38}$$

wobei $\vec{p}_{nach} = 2m\vec{v}$ und

$$\vec{p}_{vor} = \vec{p}_1(t_c) + \vec{p}_2(t_c) = m\left(\vec{v}_1(t_c) + \vec{v}_2(t_c)\right). \tag{39}$$

Somit lässt sich $\vec{v}$ durch gleichsetzen bestimmen

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_1(t_c) + \vec{v}_2(t_c)\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1 \cos\alpha \\ v_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t + v_2 - \frac{1}{2} g t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ 16,78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

d) Die Energie, die durch den Zusammenstoß in Wärme umgewandelt wird, ergibt sich aus der Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß. Potentielle Energien müssen nicht berücksichtigt werden, da wir den Vorgang als instantan ansehen und sich die Kugeln unmittelbar vor als auch unmittelbar nach dem Stoß an derselben Höhe befinden.

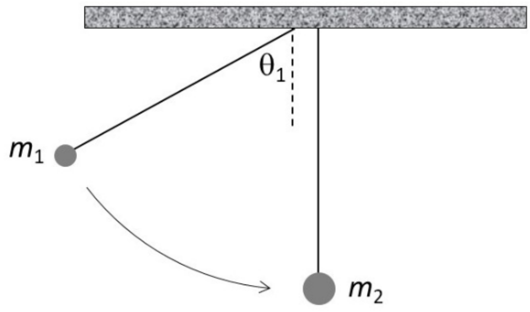
$$Q = E_{kin,nach} - E_{kin,vor} = \frac{1}{2} 2mv^2 - \frac{1}{2} m \left(v_1^2(t_c) + v_2^2(t_c) \right). \tag{41}$$

Einsetzen der benötigten Werte von $v = 21,94\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $v_1(t_c) = 30,28\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $v_2(t_c) = 5,22\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ergibt

$$Q = 930,02\,\mathrm{J}. \tag{42}$$

1.6 Elastischer Stoß Zweier Pendelkörper

Zwei Fadenpendel werden so nebeneinander platziert, dass sich in der Ruhelage die beiden kugelförmigen Pendelkörper gerade berühren und sich ihre Zentren $l = 70\,\mathrm{cm}$ unterhalb der jeweiligen Aufgängepunkte befinden. Die erste Kugel (Masse $m_1 = 100\,\mathrm{g}$) wird nun um den Winkel $\theta_1 = 60°$ ausgelenkt und losgelassen, so dass sie kurz darauf zentral mit der zweiten Kugel (Masse $m_2 = 300\,\mathrm{g}$) zusammenstößt. Der Stoß verläuft vollständig elastisch.



a) Welche Geschwindigkeit v'_1 hat die erste Kugel kurz nach dem Stoß? Welche maximale Winkelauslenkung θ'_1 erreicht sie dann?

b) Welche Geschwindigkeit v'_2 hat die zweite Kugel kurz nach dem Stoß? Welche maximale Winkelauslenkung θ'_2 erreicht sie dann?

c) Wie lässt sich aus einer beliebigen Anfangsauslenkung θ_1 der Winkel θ'_1 berechnen. Geben Sie hierzu den funktionalen Zusammenhang $\theta'_1 = f(\theta_1)$ an.

Lösung

Zunächst wird Energieerhaltung benutzt um die Aufprallgeschwindigkeit der Kugel 1 auf Kugel 2 als Funktion des Auslenkwinkels θ zu bestimmen. Aus geometrische Überlegungen folgt, dass die Höhe h der Kugel 1 über Kugel 2 bestimmt werden kann zu $h = l(1 - \cos\theta)$ und somit

$$mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}. \tag{43}$$

Für einen vollkommen elastischen Stoß gilt neben der Impulserhaltung auch (kinetische) Energieerhaltung

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \tag{44}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'}_2^2. \tag{45}$$

Einsetzen und Umformen nach v'_1 ergibt zwei mögliche Lösungen

$$v'_1 = \left[\frac{m_1 \pm m_2}{m_1 + m_2}\right] v_1. \tag{46}$$

Die Lösung mit dem + Zeichen ergibt die Situation in der Kugel 2 in Ruhe bleibt. In dem Fall der Aufgabe ist hiervon allerdings nicht auszugehen, da Kugel 2 nicht fest an einem Ort fixiert ist. Im Folgenden wird nur die Lösung mit dem − Zeichen betrachtet

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \tag{47}$$

$$v'_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1. \tag{48}$$

a) Einsetzen der gegebenen Werte ergibt für die Anfangsgeschwindigkeit v_1 der Kugel 1

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_1)} = \sqrt{gl} = 2,62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{49}$$

Im Spezialfall, dass $m_2 = 3m_1$, berechnet sich die Geschwindigkeit der ersten Kugel nach dem Stoß zu

$$v_1' = -\frac{1}{2}v_1 = -1,31\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{50}$$

Zur Bestimmung des Maximalen Auslenkwinkels θ_1' nach dem Stoß kann Gleichung (43) nach θ umgeformt werden. Mit den Werten von v_1' ergibt dies

$$\theta_1' = \arccos\left(1 - \frac{{v'}_1^2}{2gl}\right) = 29,0°. \tag{51}$$

b) Analog lassen sich die Werte für Kugel 2 berechnen

$$v_2' = \frac{1}{2}v_1 = 1,31\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{52}$$

$$\theta_2' = \theta_1' = 29,0°. \tag{53}$$

c)

$$\theta_1' = \arccos\left(1 - \frac{{v'}_1^2}{2gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{v_1^2}{8gl}\right) = \arccos\left(1 - \frac{1-\cos\theta_1}{4}\right). \tag{54}$$