
Ferienkurs Experimentalphysik 1

Übungsblatt 1: Lösung

Tutoren: Elena KAISER und Gloria ISBRANDT

1 Klassische Mechanik

1.1 Raketengleichung

Betrachten Sie eine Rakete im luftleeren Raum, die durch den Ausstoß von Treibstoff beschleunigt wird. Die Rakete verliert durch den Antrieb permanent Gas, sodass ihre Masse $m(t)$ eine Funktion der Zeit wird.

- Stelle Sie die Bewegungsgleichung für die Rakete auf, wobei v_g die Ausstoßgeschwindigkeit des Gases ist und $m(t)$ die verbleibende Raketenmasse beschreibt.
- Durch die einfache Integration nach der Zeit erhält man aus der Bewegungsgleichung den Geschwindigkeitsverlauf. Zeigen Sie, dass für konstante Ausströmgeschwindigkeit diese Gleichung folgendermaßen lautet:

$$v = v_g \cdot \frac{m(t=0)}{m(t)} \quad (1)$$

- Welche Endgeschwindigkeit hat demnach eine Rakete, die ihren Treibstoff mit konstanter Geschwindigkeit von 3km/h ausstößt, und deren Masse beim Start von 2900t auf 760t am Ende sinkt (Apollo 12).
- In der obigen Rechnung ist die Schwerkraft vernachlässigt. Um wie viel geringer ist die Geschwindigkeit aufgrund der Gravitation, wenn man während des Starts ein konstantes Schwerfeld mit Erdbeschleunigung g annimmt, die Rakete senkrecht nach oben fliegt und für den Start 16 Sekunden benötigt? Geben Sie die resultierende Endgeschwindigkeit an.

Lösung

- Zuerst wird die Bewegungsgleichung aufgestellt

$$m(t)\ddot{x} = F_{ges}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(-m(t)v_g) = -\dot{m}(t)v_g. \quad (2)$$

Hier wurde die Impulserhaltung des Gas-Rakete-Systems verwendet. Die Masse der Rakete ist gegeben durch $m(t)$ und die Masse des Ausströmenden Gases durch $m(t=0) - m(t)$.

$$p_{ges}(t) = 0 \Rightarrow (m(t=0) - m(t)) \cdot v_g = m(t) \cdot v_{Rakete}(t), \quad (3)$$

v_{Rakete} ist die Geschwindigkeit der Rakete und $m(t = 0)$ die Anfangsmasse der Rakete.

b) Aus der Bewegungsgleichung lässt sich folgern

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}v(t) = -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}v_g \quad (4)$$

$$\rightarrow dv = -v_g \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \cdot dt. \quad (5)$$

Durch einfache Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{v(t)} dv &= \int_0^t -v_g \frac{\dot{m}(t')}{m(t')} dt' = -v_g \ln m(t') \Big|_0^t \\ &= +v_g (\ln m(t=0) - \ln m(t)) = v_g \ln \frac{m(t=0)}{m(t)}. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \dot{f}(x).$$

c) Mit den angegebenen Werten folgt für die Endgeschwindigkeit

$$v_{end} = 3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \ln \frac{2900 \text{ t}}{760 \text{ t}} = 4,02 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (6)$$

d) Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$m(t)\ddot{x} = -\dot{m}(t)v_g - m(t)g. \quad (7)$$

Analog zu c) kann man die Gleichung durch $m(t)$ teilen und nach t integrieren und erhält

$$v(t) = v_g \ln \frac{m(t=0)}{m(t)} - g \cdot t. \quad (8)$$

Die Endgeschwindigkeiten mit und ohne Gravitation unterscheiden sich lediglich um den Ausdruck $-g \cdot t$

$$v_{mit} - v_{ohne} = v(t = 16 \text{ s}) - v_g \ln \frac{m(t=0)}{m(t=16 \text{ s})} = -g \cdot t = 156,96 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,156 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (9)$$

1.2 Wurf von einem Balkon

Von einem Balkon in der Höhe h werde eine Kugel mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Horizontalen nach oben geworfen.

- Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und beschreibe die Wurfbahn durch einen zeitabhängigen Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Gib auch die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ an.
- Zu welchem Zeitpunkt trifft die Kugel auf dem Erdboden auf?
- Welche Geschwindigkeit $v_1 = |\vec{v}_1|$ hat die Kugel beim Auftreffen auf dem Boden?
- Eine zweite Kugel werde unter dem Winkel $\beta = -\alpha$ nach unten geworfen. Um welche Zeitdifferenz Δt erfolgt der Aufprall auf den Boden schneller als im ersten Fall?
- Warum hängt das Ergebnis von d) nicht von h ab?

Lösung

- a) Als Koordinatensystem kann das Ortsfeste Koordinatensystem gewählt werden, welches den Ursprung auf Bodenhöhe hat. Für den Ortsvektor gilt dann

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \cdot t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t + h \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Durch einmaliges Ableiten erhält man den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

- b) Die z-Komponente wird gleich 0 gesetzt und die resultierende quadratische Gleichung gelöst

$$z(t_1) = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t_1 + h \quad (12)$$

$$\Rightarrow t_{1,\pm} = \frac{-v_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot gh}}{-g} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \mp \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + 2 \frac{h}{g}}.$$

Hier ist aber lediglich die positive Lösung physikalisch sinnvoll.

$$\rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2(\alpha)}} \right).$$

- c) Die Geschwindigkeit beim Aufprall ist gegeben durch

$$\vec{v}(t_1) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) - v_0 \sin(\alpha) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2(\alpha)}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ -v_0 \sin(\alpha) \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2(\alpha)}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Darauf folgt der Betrag des Vektors

$$|\vec{v}| = v_0 \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \left(1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2(\alpha)} \right)} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}. \quad (14)$$

- d) Rechnungen analog zu den vorherigen Aufgaben, lediglich Winkel mit $\beta = -\alpha$ ersetzt. Es gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Der Ortsvektor lautet nun

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \cdot t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin(\alpha) \cdot t + h \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die z-Komponente wird wieder gleich 0 gesetzt und nach dem Lösen der quadratischen Gleichung erhält man

$$t'_1 = -\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \mp \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} + 2 \frac{h}{g}} \quad \Rightarrow \quad t'_1 = -\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gh}{\sin^2(\alpha)v_0^2}} \right).$$

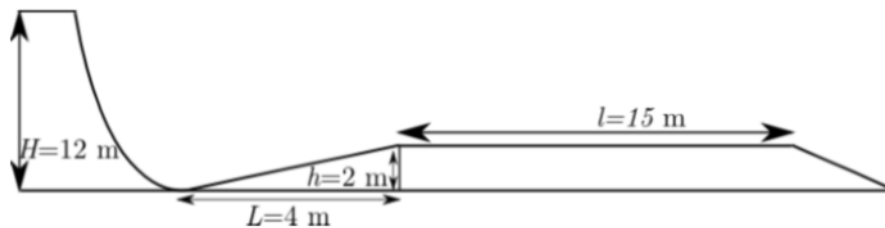
Wobei wieder nur die physikalisch relevante Lösung (+) in Betracht gezogen wurde.
Die Zeitdifferenz der beiden Aufpralle beträgt

$$\Delta t = t_1 - t'_1 = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2(\alpha)}} + 1 - \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2(\alpha)}} \right) = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}. \quad (16)$$

- e) Die Zeitdifferenz des Aufpralls hängt lediglich von dem Winkel und nicht der Höhe ab, weil diese im Grunde genau die Zeit angibt, die der erste Ball braucht von Höhe h auf die maximale Höhe zu steigen und wieder auf h zu fallen. Sobald der erste Ball wieder auf der Höhe h ist fällt er unter den gleichen Bedingungen, unter denen Ball 2 abgeworfen wurde: mit Geschwindigkeit v_0 und Winkel $-\alpha$.

1.3 Snowboardfahrer

Ein Snowboardfahrer fährt von einem Anfangshügel mit gegebener Höhe $H = 12 \text{ m}$ auf eine Sprungschanze zu (siehe Abbildung). Das flache Stück vor dem Absprung hat eine Länge $l = 15 \text{ m}$. Wurde die Schanze ordnungsgemäß gebaut bzw. gelingt es dem Snowboarder im Aufsprung zu landen? (Reibung wird vernachlässigt)



Lösung

Um die Flugbahn des Snowboardfahrers zu berechnen muss zuallererst die Absprunggeschwindigkeit berechnet werden. Diese erhält man über die Energieerhaltung:

$$E_{pot} = E_{kin} \quad \Rightarrow \quad m \cdot g \cdot (H - h) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \quad (17)$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nun muss der Absprungwinkel berechnet werden

$$\alpha = \arctan \frac{2m}{4m} = 26,56^\circ. \quad (18)$$

Die Flugbahn, die den Snowboardfahrer beschreibt, lautet folgendermaßen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Um die Flugzeit zu bestimmen wird die y-Komponente gleich 0 gesetzt

$$y(t_1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t_1(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt_1) \stackrel{!}{=} 0 \quad (20)$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} = 1,276 \text{ s.}$$

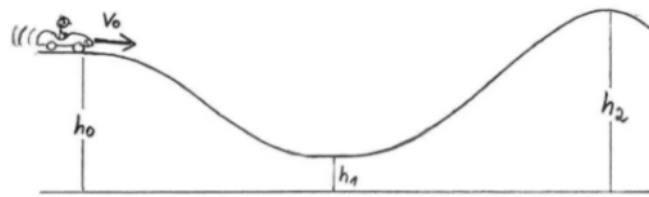
Der Snowboardfahrer landet also bei

$$x(t_1) = v_0 \cos(\alpha)t_1 = 15,978 \text{ m.}$$

Die Sprungschanze ist ordnungsgemäß gebaut.

1.4 Achterbahnen

- a) Du bist auf dem Rummel mit verschiedenen Achterbahnen. Auf einer Achterbahn wird ein Wagen aus der Höhe h_0 mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 gestartet. An der tiefsten Stelle (Höhe h_1) ist der Wagen doppelt so schnell wie an der höchsten Stelle (Höhe h_2). Welche Anfangsgeschwindigkeit hat der Wagen in Abhängigkeit von den Höhen h_0, h_1, h_2 ?



- b) Als zweites siehst du eine Achterbahn mit Looping. Wie groß muss bei dem gezeichnete Looping mit Radius R die Anfangshöhe h sein, damit man am höchsten Punkt kurz Schwerelosigkeit erfährt?



Lösung

- a) Die Energie an den verschiedenen Stellen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E_0 &= m \cdot g \cdot h_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \\ E_1 &= m \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \\ E_2 &= m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \\ v_1 &= 2 \cdot v_2 \quad , \quad E_0 = E_1 = E_2 \end{aligned}$$

Die Energieerhaltung und die Bedingung an die Geschwindigkeiten eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \rightarrow g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot v_2^2 &= g \cdot h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \\ \frac{3}{2} \cdot v_2^2 &= g \cdot (h_2 - h_1) \\ \rightarrow v_2^2 &= \frac{2}{3 \cdot g(h_2 - h_1)} \\ E_0 = E_1 &\Rightarrow g \cdot h_0 + \frac{1}{2} \cdot v_0^2 = g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot g(h_2 - h_1) = \frac{1}{3} \cdot g \cdot h_2 - \frac{2}{3} \cdot g \cdot h_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = 2 \cdot g \left[\frac{1}{3} \cdot h_2 - \frac{2}{3} \cdot h_1 - h_0 \right]$$

b) Zwei Bedingungen können aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \text{Energieerhaltung:} \quad & m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot 2R + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ \text{Kräftebedingung für Schwerelosigkeit:} \quad & F_Z = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot g = F_g. \end{aligned}$$

Aus der Kräftebedingung erhält man $v^2 = g \cdot R$. Das in die Energieerhaltung eingesetzt gibt $mgh = mg2R + \frac{1}{2}mgR$.

Die Anfangshöhe ist also

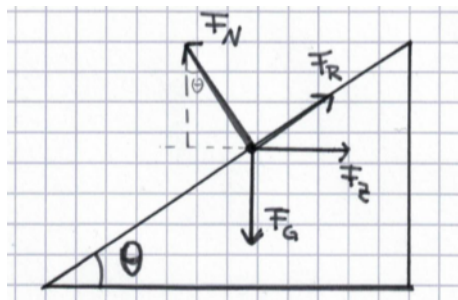
$$h = \frac{3}{2}R.$$

1.5 Kurvenplanung

Ein Bauingenieur soll einen Kurvenabschnitt einer Straße planen. Er erhält folgende Vorgaben:

- Bei vereister Straße, d.h. einem Reibungskoeffizient von $\mu_H = 0,8$ zwischen Straße und Gummi, darf ein stehendes Auto nicht nach innen rutschen. Unter welchem Winkel θ sollte die Straße überhöht sein?
- Autos, die mit bis zu 60 km/h fahren, dürfen nicht aus der Kurve getragen werden. Welchen Radius R muss die Kurve mindestens besitzen?

Lösung



a) Aus dem Kräftegleichgewicht folgt

$$\begin{aligned} F_G \cdot \cos(\theta) &= F_N \\ F_G \cdot \sin(\theta) &= F_R \stackrel{\text{def}}{=} \mu_H \cdot F_N = \mu_H \cdot F_G \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

Die linke und rechte Seite kann durch F_G geteilt werden und es wird durch $\cos(\theta)$ geteilt

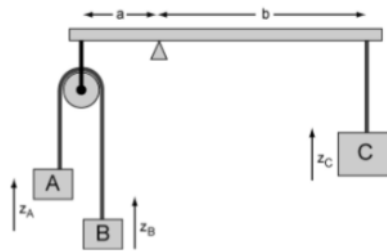
$$\rightarrow \tan(\theta) = \mu_H \Rightarrow \theta = \arctan(\mu_H) = 38,66^\circ.$$

b) Wieder mit dem Kräftegleichgewicht erhält man

$$\begin{aligned} F_Z = m \cdot \frac{v^2}{R} &= \sin(\theta) \cdot F_N = \sin(\theta) \cdot F_G \cdot \cos(\theta) = \sin(\theta) \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta) \\ \rightarrow R &= \frac{v^2}{g \sin(\theta) \cos(\theta)} = 353,7 \text{ m.} \end{aligned}$$

1.6 Gleichgewicht: Balken mit Rollen

An einem asymmetrisch unterstützten Balken sind drei Massen (m_A, m_B, m_C) aufgehängt. Die ungleichen Massen A und B hängen über eine Rolle zusammen und setzen sich in Bewegung.



- Leiten Sie die Seilkraft F_S her, die auf den Körper A und B wirkt, wenn diese sich in Bewegung setzen, während der Balken unbeweglich ist.
- Berechnen Sie die Kraft, die die gesamte Rollenkonstruktion mit den Massen $m_A = 1 \text{ kg}$ und $m_B = 2 \text{ kg}$ auf den Balken ausüben.
- Wie groß muss die Masse des Körpers C sein, damit der Balken waagrecht bleibt, wenn das Längenverhältnis $b : a = 3 : 1$ ist (während sich die Körper A und B bewegen, Massen wie in b))?

Lösung

- Die Bewegungsgleichung der Massen lautet

$$\begin{aligned} m_A \ddot{z}_A &= F_S - m_A g \\ m_B \ddot{z}_B &= F_S - m_B g. \end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung des Systems lautet $z_A + z_B = \text{const.}$. Nach der Zeit abgeleitet ergibt das $\ddot{z}_A + \ddot{z}_B = 0$.

Dadurch kann man nun die Bewegungsgleichungen vereinen und erhält

$$\begin{aligned} -g + \frac{F_S}{m_A} - g + \frac{F_S}{m_B} &= 0 \\ \Rightarrow F_S &= 2g \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)^{-1} = 2g \cdot \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} - \end{aligned}$$

- Die auf die Konstruktion wirkende Kraft entspricht zwei mal der Seilkraft. Jede Masse zieht mit der Seilkraft an der Konstruktion

$$2F_S = 4g \cdot \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = 26,16 \text{ N.}$$

- Mit dem Drehmomentgleichgewicht folgt

$$2F_S \cdot a = F_C \cdot b \text{ mit } F_C = m_C \cdot g$$

$$2 \frac{a}{b} F_S = m_C \cdot g$$

$$\rightarrow m_C = 2 \frac{a}{b} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \frac{8}{3} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = 1,78 \text{ kg.}$$

1.7 Leiter

Romeo nimmt eine gleichmäßig gebaute, 10 m lange Leiter und lehnt sie gegen die glatte (reibungsfreie) Wand unter Julias Balkon. Die Leiter hat eine Masse von 22 kg und der Fußpunkt der Leiter ist 2,8 m von der Wand entfernt. Romeo hat eine Masse von 70 kg. Als er 90 % der Leiter erklommen hat, kommt die Leiter ins Rutschen. Welchen Haftreibungskoeffizient μ_H ergibt sich damit zwischen Leiter und Boden?

Lösung

Für die Kräfte gilt

$$F_N = (m_L + m_R)g \quad , \quad F_H = \mu_H F_N = \mu_H(m_L + m_R)g.$$

Der Winkel zwischen Leiter und Boden ist

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2,8}{10}\right) = 73,74^\circ. \quad (21)$$

Um das Drehmomentgleichgewicht aufzustellen müssen die Ortsvektoren der Angriffspunkte der Kräfte bestimmt werden. Dazu wird der Auflagepunkt an der Wand als Referenzpunkt verwendet

$$\vec{r}_R = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \cdot 0,1L \\ -\sin(\alpha) \cdot 0,1L \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_R = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \cdot 0,5L \\ -\sin(\alpha) \cdot 0,5L \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$
$$\vec{r}_R = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \cdot L \\ -\sin(\alpha) \cdot L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Drehmomentgleichgewicht ist

$$\vec{M}_{ges} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0.$$

Die Drehmomente sind

$$\vec{M}_R = -0,1L \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -m_R g \\ 0 \end{pmatrix} = 0,1L m_R g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\vec{M}_L = 0,5L m_L g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\vec{M}_N = -L(m_L + m_R)g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

$$\vec{M}_{Reibung} = L\mu_H(m_L + m_R) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Die Summe der Drehmomente muss 0 ergeben

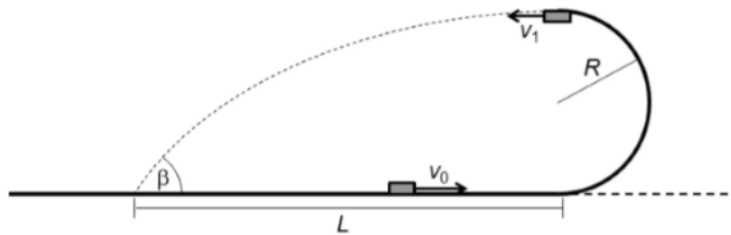
$$0,1m_R g \cos(\alpha) + 0,5Lm_L g \cos(\alpha) - L(m_L + m_R)g \cos(\alpha) + L\mu_H(m_L + m_R) \sin(\alpha) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung nach μ_H umgestellt liefert das Ergebnis

$$\mu_H = \frac{(m_L + m_R) - 0,1m_R - 0,5m_L}{m_L + m_R} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 0,23.$$

1.8 Halber Looping

Ein Schlitten tritt in einen halben Looping mit Radius $R = 10$ m ein, worin er reibungsfrei gleitet.



- Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mindestens sein, damit der Wagen den obersten Punkt des Loopings überhaupt erreichen kann, ohne anzustürzen?
- Mit welcher Geschwindigkeit v_1 tritt der Wagen aus dem halben Looping aus, wenn der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 25$ m/s beträgt?
- In welcher Entfernung L trifft der nach dem Austritt aus dem Looping frei fallende Schlitten für die unter b) gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf dem Boden auf?
- Unter welchem Winkel β trifft der fallende Schlitten für die unter b) gegebene Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf dem Boden auf?

Lösung

- Zwei Bedingungen müssen gelten, damit der Schlitten den höchsten Punkt des Loopings erreicht

$$\begin{aligned} \text{Energieerhaltung:} \quad & \frac{1}{2}mv_0^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Kräftegleichgewicht:} \quad & F_Z = m\frac{v^2}{R} = mg = F_G \\ \Rightarrow v^2 = gR, \quad & \frac{1}{2}v_0^2 = 2gR + \frac{1}{2}gR = \frac{5}{2}gR \\ \rightarrow v_0 = \sqrt{5gR} = & 22,15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- Energieerhaltung liefert die Austrittsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= mg2R + \frac{1}{2}mv^2 \\ \rightarrow v &= \sqrt{v_0^2 - 4gR} = 15,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

- Die Bahnkurve nach dem Verlassen des Loopings sieht wie folgt aus

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + 2R \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Zum Zeitpunkt t_1 erreicht der Schlitten den Boden; $y(t_1) = 0$

$$y(t_1) = 0 = 2R - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{4R}{g}} = 1,98s$$
$$\rightarrow L = x(t_1) = v \cdot t_1 = 30,20 \text{ m.}$$

d) Für den Winkel gilt

$$\tan(\beta) = -\frac{v_y}{v_x} \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v \\ -gt \end{pmatrix}$$
$$\beta = \arctan\left(-\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{gt_1}{v}\right) = 51,86^\circ.$$