Theoretische Physik I: Probeklausur

16.Sep.2019

Matthias Hanke, Stephan Meighen-Berger

Kurzfragen

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Hamiltonfunktion an, für die gilt
$$H \neq E. \tag{1}$$

2. Geben Sie die Erhaltungsgrößen für Zeit-, Translations- und Rotationsinvarianz an.

3. Geben Sie die Koordinatentransformation die gemacht wird, um zwischen Lagrange- und Hamiltonformalismus zu wechseln.

4. Geben Sie die Anzahl der Freiheitsgrade für das System, dargestellt in Abbildung 1, an.

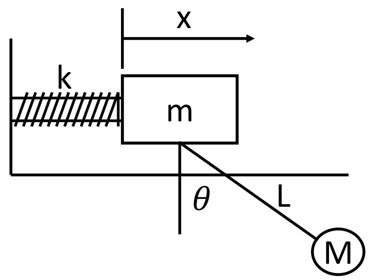

Figure 1:

5. Ein Teilchen bewegt sich in der xy-Ebene und befolgt
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\alpha y; \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha x. \tag{2}$$
Die Bahn des Teilchens kann am besten als was beschrieben werden?

6. Welche von den Folgenden Kräften ist konservativ?
   (a) $\vec{F}(x,y) = y\vec{e}_y$
   (b) $\vec{F}(x,y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$
   (c) $\vec{F}(x,y) = x(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$
   (d) $\vec{F}(x,y) = xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y$
   (e) $\vec{F}(x,y) = y^2\vec{e}_x - xy\vec{e}_y$

Lösungen

1. $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + p_\theta\omega + mgR(1 - \cos(\theta - \omega t))$
2. E, p und L
3. $(q, \dot{q}) \to (q, p_q)$
4. 2
5. Eine Kreisbahn
6. (b)

Trägheitstensor

1. Berechnen Sie den Trägheitstensor einer Vollkugel mit konstanter Dichte ρ.
2. Berechnen Sie nun den Trägheitstensor einer Vollkugel mit einer radialen Dichteverteilung $\rho(r)$.

Lösungen

1. Da die Kugel Rotationssymmetrisch ist, kann man die Drehachse beliebig wählen. Daher wählen wir hier, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die z-Achse als Drehachse und setzen den Mittelpunkt der Kugel in den Ursprung. Aufgrund von der Symmetrie gilt

$$I_{i\neq j} = 0, \tag{3}$$

und

$$\forall i : I_{i,i} = I. \tag{4}$$

Es ist daher nur ein Integral zu lösen. In Kugelkoordinaten lautet es

$$I = \rho \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi r^4 \sin^3(\theta). \tag{5}$$

Nach Integration ergibt sich für die Diagonalelemente des Tensors

$$I = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}mR^2. \tag{6}$$

2. Mit der radialen Abhängigkeit gelten trotzdem die Argumente aus der ersten Aufgabe, nur diesmal kann man nicht über r integrieren

$$I_{x,x} = I_{y,y} = I_{z,z} = I = \frac{2}{3}4\pi \int_0^R \rho(r) r^4 \mathrm{d}r. \tag{7}$$

Streuung eines Teilchens an einem Zentralpotential

Gegeben sei ein Potential mit

$$V(r) = -\frac{k}{r^3};\ k > 0. \tag{8}$$

1. Bestimmen Sie das effektive Potential für ein Teilchen mit Masse m und machen Sie eine Skizze davon.
2. Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn eines Teilchens mit Drehmoment l. Ist diese Bahn stabil?
3. Angenommen das Teilchen fliegt aus dem unendlichen auf das Potential zu. Was ist der Wirkungsquerschnitt σ, dass es in das Zentrum des Potentials fallen wird?

Lösungen

1. Das effektive Potential lautet

   $$V_{eff} = -\frac{k}{r^3} + \frac{l^2}{2mr^2}, \tag{9}$$

   mit Drehmoment l.

2. Den Radius der Kreisbahn erhaltet man über die Ableitung und Minimierung des Potentials

   $$\frac{\partial V_{eff}}{\partial t} = \frac{3k}{r^4} - \frac{l^2}{mr^3} = 0, \tag{10}$$

   daher

   $$r_0 = \frac{3km}{l^2}. \tag{11}$$

   Da die Krümmung negativ ist, ist die Kreisbahn instabil.

Lagrangesystem mit Bedingungen

Gegeben sei eine Lagrangefunktion der Form

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2). \tag{12}$$

Dessen Koordinaten befolgen der Bedingung

$$A_1(q,t)\mathrm{d}q_1 + A_2(q,t)\mathrm{d}q_2 + B(q,t)\mathrm{d}t = 0. \tag{13}$$

1. Geben Sie die Voraussetzungen an, dass

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2 - L, \tag{14}$$

   ein Integral der Bewegung ist.

2. Beweisen Sie Ihre Behauptungen aus der vorigen Aufgabe.

Lösungen

1. Die Voraussetzungen sind

$$B = 0;\ Q_1 = Q_2 = 0;\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

   wo Q_i eine nicht konservative Kraft beschreibt.

2. Der Beweis erfolgt über Variationsrechung (siehe Lagrange-Multiplikator). Definiere

$$\tilde{L} = L + \lambda_1 A_1(q,t)\mathrm{d}q_1 + \lambda_2 A_2(q,t)\mathrm{d}q_2 + \lambda_B B(q,t)\mathrm{d}t. \tag{16}$$

   Da gelten soll $\delta S(\tilde{L}) = 0$, muss $B = 0$ gelten, sonst kann man dies nicht für die Integration garantieren. Die restlichen Terme lauten

$$\delta S = \int \left(\sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_i \frac{\partial A_i \mathrm{d}q_i}{\partial q_i} \right] \right) \mathrm{d}t. \tag{17}$$

   Daraus folgen die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda_i \frac{\partial A_i \mathrm{d}q_i}{\partial q_i} \right] = 0. \tag{18}$$

   Verwendet man die Definition von H aus der Angabe und setzt man die Euler-Lagrange Gleichungen ein (und schreibt L explizit)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_i \lambda_i \left(A_i \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \lambda_i Q_i + \frac{\partial L}{\partial t} = [Q_i = 0] = \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

   In der obigen Gleichung musste man die nicht konservativen Kräfte $Q_i = A_i \dot{q}_i$ gleich null setzen und verlangen, dass L keine explizite Zeitabhängigkeit hat. Dann ist H eine konservierte Größe. Man könnte hier B noch nicht gleich null gesetzt haben. Dann hätte man einen zusätzlichen Term mit B der nur null wird wenn $B = 0$ gilt (für alle t).

Gekoppelte Pendel

Gegeben sind zwei über eine Feder gekoppelte Pendel, wie in Abbildung 2 dargestellt.

1. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems. Nehmen Sie an, dass $\theta_{1,2}$ sehr klein sind und verwenden Sie eine Kleinwinkelnäherung

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}; \ \sin\theta \approx \theta. \tag{20}$$

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen indem Sie die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenvektoren berechnen.

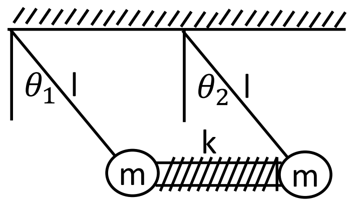

Figure 2:

Lösungen

1. Die Auslenkungen der Pendel kann man mittels der Kleinwinkelnäherung als

$$x_i = l\theta_i, \tag{21}$$

beschreiben. Die potentielle Energie des Systems lautet

$$V = mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2. \tag{22}$$

Diese Energie kann man nun mit der Kleinwinkelnäherung und Gleichung 21 vereinfachen

$$V = mgl\frac{\theta_1^2}{2} + mgl\frac{\theta_2^2}{2} + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 = \frac{mgx_1^2}{2l} + \frac{mgx_2^2}{2l} + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2. \tag{23}$$

Die Umformung nach x_i muss nicht gemacht werden. Man kann diese Gleichungen auch äquivalent mit θ_i formulieren. Die kinetische Energie des Systems ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2). \tag{24}$$

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mgx_1^2}{2l} - \frac{mgx_2^2}{2l} - \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2. \tag{25}$$

Durch einsetzen in die Euler-Lagrangegleichungen erhalten man nun die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mgx_1}{l} + k(x_2-x_1) \tag{26}$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mgx_2}{l} - k(x_2-x_1). \tag{27}$$

Äquivalent lauten die Bewegungsgleichungen für die Winkel

$$m\ddot{\theta}_1 = -\frac{mg\theta_1}{l} + k(\theta_2 - \theta_1) \tag{28}$$

$$m\ddot{\theta}_2 = -\frac{mg\theta_2}{l} - k(\theta_2 - \theta_1). \tag{29}$$

2. Um die Eigenfrequenz und die Eigenvektoren zu bestimmen verwenden wir hier die Bewegungsgleichungen für die Winkel. Macht man den Ansatz $\theta_i = A_i e^{i\omega t}$ erhaltet man die Gleichungen

$$0 = A_1 \left(\omega - \frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m} A_2 \tag{30}$$

$$0 = A_2 \left(\omega - \frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m} A_1. \tag{31}$$

In den obigen Gleichungen wurde der Exponentialterm gekürzt. Diese Gleichungen kann man in eine Matrixgleichung umformulieren

$$\begin{pmatrix} \omega - \frac{g}{l} - \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \omega - \frac{g}{l} - \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{32}$$

Nicht-triviale Lösungen existiere wenn die Determinante der Matrix gleich null ist

$$\left(\omega - \frac{g}{l} - \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0. \tag{33}$$

Dies umgeschrieben lautet

$$\left(\omega - \frac{g}{l}\right)\left[\left(\omega - \frac{g}{l}\right) - 2\frac{k}{m}\right]. \tag{34}$$

Damit lauten die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \frac{g}{l};\ \omega_2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}. \tag{35}$$

Die dazugehörigen Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$