Theoretische Physik I: Übung #4

16.Sep.2019

Matthias Hanke; Stephan Meighen-Berger

Matthias Hanke **Stephan Meighen-Berger**

Beispiel 1

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich auf der Innenseite eines Zylinders und erfährt eine Federkraft $\vec{F} = -k\vec{r}$. Berechnen Sie die Bewegung des Teilchens.

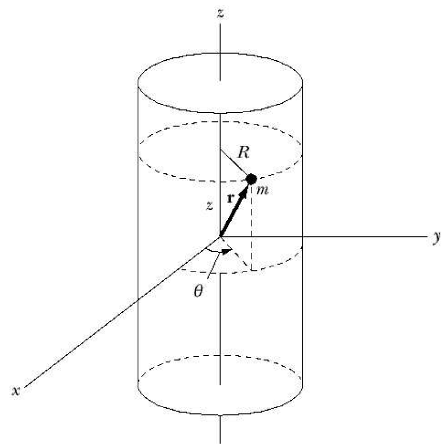

Fig. 7–9.

Figure 1:

Lösung
Die potentielle Kraft lautet

$$U = \frac{1}{2}kr^2. \tag{1}$$

Wegen der Bedingung, dass $x^2 + y^2 = R^2$ ist gilt

$$U = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \tag{2}$$

Die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten lautet

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2. \tag{3}$$

Mit der Bedingung gilt $\dot{r} = 0$, daher

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2). \tag{4}$$

Somit lautet die Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \tag{5}$$

Hier verwenden wir den Hamiltonformalismus. Dazu muss man noch die kanonischen Größen bestimmen.

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta};\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{6}$$

Daher lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \tag{7}$$

Die resultierende Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \tag{8}$$

Die Hamiltongleichung lauten dann

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2};\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \tag{9}$$

und

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0;\ \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz. \tag{10}$$

Die vorletzte Gleichung bedeutet, dass der Drehimpuls erhalten ist. Auch aufgrund von dieser Gleichung gilt

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \to \theta(t) = \dot{\theta}t. \tag{11}$$

. Die vertikale Bewegung ist ein einfacher harmonischer Oszillator

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} = -\frac{k}{m}z = -\omega_0^2 z, \tag{12}$$

was die Lösung

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0), \tag{13}$$

hat.

Beispiel 2

Verwenden Sie die Kettenregel und bestimmen Sie die totale Zeitableitung einer Funktion $F(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$. Stellen Sie die kanonischen Größen mittels den Hamiltongleichungen dar. Das Resultat sollte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \{H, F\}, \tag{14}$$

sein.
Lösung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \frac{\partial F}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial F}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2}\dot{p}_2 \tag{15}$$

Durch einsetzen der Hamiltongleichung bekommt man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} = \{H, F\}. \tag{16}$$

Beispiel 3

Gegeben sei eine Lagrangefunktion in sphärischen Koordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r). \tag{17}$$

Bestimmen Sie die resultierende Hamiltonfunktion. Verwenden Sie dann diese und stellen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung auf.
Diese sollen Sie nun für den Radialanteil lösen. Dazu machen Sie den Ansatz

$$S(t, r, \theta, \phi) = S_1(t) + S_2(r) + S_3(\theta) + S_4(\phi). \tag{18}$$

Setzen Sie dann $\frac{\mathrm{d}S_4}{\mathrm{d}\phi} = L_z$ und $\frac{\mathrm{d}S_3}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}$.
Stellen Sie nun die Gleichung für den Radialanteil auf. Bestimmen Sie nun im Spezialfall

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \tag{19}$$

die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}r}. \tag{20}$$

Bestimmen Sie damit nun $\phi = -\frac{\partial S_2}{\partial L}$ (inverse Legendre Transformation). Das resultierende Integral ergibt

$$\phi = \arccos\frac{L^2 - GMm^2r}{r\sqrt{2mEL^2 + G^2M^2m^4}} + \phi_0. \tag{21}$$

Stellen Sie diese Gleichung für L^2 um und bestimmen Sie e und d aus der Gleichung

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}. \tag{22}$$

Bestimmen Sie nun für welche Energien eine Ellipse (e $<$ 0), Parabel (e $=$ 1) und Hyperbel (e $>$ 1) beschrieben werden.
Lösung
Die kanonischen Impulse lauten

$$p_r = m\dot{r};\ p_\theta = mr^2]\dot{theta};\ p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}. \tag{23}$$

Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r). \tag{24}$$

Einsetzen in die Definition der Hamilton-Jacobi Gleichung ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + V(r) = 0. \tag{25}$$

Mittels des gegebenen Ansatzes und der Realisierung dass

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} = -E, \tag{26}$$

gilt, erhaltet man für den Radialanteil

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \rightarrow \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}r} = \sqrt{2mE - 2mV(r) - \frac{L^2}{r^2}}. \tag{27}$$

Die inverse Legendre Transformation ergibt

$$\phi = -\frac{\partial S_3}{\partial L} = L \int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{2mEr^2 + 2GMm^2r - L^2}}. \tag{28}$$

Die Lösung des Integrals bekommt man aus der Angabe. Somit ergibt sich

$$L^2 = r\left(GMm^2 + \sqrt{G^2M62m^4 + 2mEL^2}\cos(\phi - \phi_0)\right). \tag{29}$$

Verwendet man die gegebene Formel für ein Segment bekommt man

$$e = \frac{\sqrt{G^2M62m^4 + 2mEL^2}}{GMm^2}, \tag{30}$$

$$d = L^2 \frac{GMm^2}{\sqrt{G^2M62m^4 + 2mEL^2}}. \tag{31}$$

Daher hat man eine Ellipse, Parabel und Hyperbel jeweils für E $<$ 0, E $=$ 0 und E $>$ 0.

Beispiel 4

Ein Seil der Länge l wird zwischen zwei Bäume aufgehängt, die eine Distanz $d < l$ voneinander stehen. Bestimmen Sie die Höhe des Seils y abhängig von x. Dazu bestimmen Sie zuerst die potentielle Energie des Seils abhängig von $y(x)$. Dann berechnen Sie die Lagrangedichte und verwenden Sie diese um die "Bewegungsgleichungen" zu bestimmen. Lösen Sie dann diese für $y(x)$. Um die Gleichung zu lösen multiplizieren Sie die Gleichung mit y' und ermitteln Sie ob das Resultat die Ableitung einer Funktion ist. Nach der Integration verwenden Sie

$$\frac{\chi}{\sqrt{1+\chi'^2}} = A \to \chi = C \cosh\left(\frac{x+B}{A}\right). \tag{32}$$

Lösung
Die potentielle Energie des Seils im Gravitationsfeld ist gegeben durch

$$V(x,y,\dot{y}) = \int_0^l gy(x)\rho\frac{\mathrm{d}s}{l} = \frac{g\rho}{l}\int_0^d y(x)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Hier wurde verwendet, dass gilt

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = \left(1 + \left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\mathrm{d}x^2. \tag{34}$$

Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L = -V. \tag{35}$$

Daher gilt für die Lagrangedichte $L = \int \mathcal{L}\mathrm{d}x$

$$\mathcal{L} = -\frac{mg}{l}y\sqrt{1+y'^2}. \tag{36}$$

Nach ein paar Manipulationen gilt

$$\frac{yy''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = 0. \tag{37}$$

Verwendet man nun den Hinweis gilt

$$\frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0/ \tag{38}$$

Die Integration ist nun trivial

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C. \tag{39}$$

Mit dem Hinweis erhaltet man die Lösung

$$y = C\cosh\left(\frac{x+D}{C}\right). \tag{40}$$

Beispiel 5

Ein schwingendes Seil kann wie unendlich viele zusammenhängende Pendel betrachtet werden. Stellen Sie die Bewegeungsgleichungen für solch ein Seil auf. Dazu bestimmen Sie zuerst die Lagrangedichte gegeben durch

$$L = \int (\mathrm{d}T - \mathrm{d}U) = \int \mathcal{L}\mathrm{d}V. \tag{41}$$

Die infinitesimalen Energien eines Seilsegments der Länge ds muss daher bestimmt werden. Dazu verwenden Sie

$$\mathrm{d}s \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}y. \tag{42}$$

Vernachlässigen Sie alle infinitesimalen Terme über der Ordnung 2. und verwenden Sie eine konstante Dichte μ.

Lösung

Eine infinitesimale Änderung der Höhe h ist gegeben durch

$$\mathrm{d}h = |\mathrm{d}s - \mathrm{d}s\cos\mathrm{d}\theta| = |\mathrm{d}s - \mathrm{d}y| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y. \tag{43}$$

Damit ergibt sich für die potentielle Energie

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W = \mathcal{T}\mathrm{d}h = \mu(l-y)g\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y. \tag{44}$$

Die kinetische Energie hat die bekannte Form

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\mathrm{d}s\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \approx \frac{1}{2}\mu\mathrm{d}y\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{45}$$

Hier wurden die Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Zusammen ergibt sich für die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \mu(l-y)g\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \tag{46}$$

Setzt man dies in die Euler-Lagrange Gleichungen ein bekommt man

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\left((l-y)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right). \tag{47}$$

Beispiel 6

Die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen in einem Feld lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{A}\dot{\vec{r}} - \phi). \tag{48}$$

Berechnen Sie die resultierende Bewegungsgleichung und benennen Sie die Kraft. Beachten Sie dabei, dass $\vec{A}$ ein Vektorpotential ist, für das gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{A}. \tag{49}$$

Des weiteren gilt

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A})_i, \tag{50}$$

und

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{51}$$

Beachten Sie

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\right)\dot{r}_j = \dot{r}_j\frac{\partial}{\partial r_i}A_j - \dot{r}_j\frac{\partial}{\partial r_j}A_i = (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\dot{r}_j\frac{\partial}{\partial r_l}A_m = \epsilon_{ijk}\dot{r}_j\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial r_l}A_m = (\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times A))_i. \tag{52}$$

Lösung
Für die Terme der Euler-Lagrangegleichung gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = q\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{A}\dot{\vec{r}}) - q\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}}, \tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{r} + q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}. \tag{54}$$

Daher gilt komponentenweise

$$m\ddot{r}_i = -q\frac{\partial}{\partial r_i}\phi - q\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\right)\dot{r}_j. \tag{55}$$

Mit Einsetzen der Hinweise

$$m\ddot{r}_i = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})_i, \tag{56}$$

was der Lorentzkraft entspricht.

Beispiel 7

Nun Lösen Sie das vorige Beispiel, diesmal aber mit vierer Vektoren. Dazu starten Sie mit der Lagrangefunktion

$$L(\tau) = \frac{1}{2} m u^\mu(\tau) u_\mu(\tau) + q u^\mu(\tau) A_\mu(x), \tag{57}$$

wobei $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\tau$ die Vierergeschwindigkeit ist. Die Euler-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\nu} = 0, \tag{58}$$

und der anti-symmetrische Elektromagnetischetensor lautet

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{59}$$

Lösung
Von den Euler-Gleichungen erhaltet man

$$q u^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m u_\nu + q A_\nu). \tag{60}$$

Für die totale Ableitung gilt

$$\frac{\mathrm{d}A_\nu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\mu. \tag{61}$$

Dies setzt man ein und erhaltet mit dem EM-Tensor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m u_\nu) = q u^\mu F_{\nu\mu}. \tag{62}$$

Das ist die kovariante Form der Lorentzkraft.

Beispiel 8

Teilchenphysiker arbeiten mit dem sogenannten Standard Modell der Teilchenphysik. Dieses Modell beschreibt alle bekannten Kräfte, bis auf die Gravitation. Die Lagrangefunktion des Standard Modells ist in Abbildung 2 dargestellt. Hier werden Sie den ersten Schritt Richtung Teilchenphysik tätigen und die Klein-Gordon

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu + \tfrac{1}{2}ig_s^2(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu + \\
&\bar{G}^a\partial^2 G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu \bar{G}^a G^b g^c_\mu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2}M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \\
&\tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \tfrac{1}{2}m_h^2 H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2\phi^+\phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \\
&\tfrac{1}{2c_w^2}M\phi^0\phi^0 - \beta_h[\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g}H + \tfrac{1}{2}(H^2+\phi^0\phi^0+2\phi^+\phi^-)] + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - \tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \\
&\tfrac{1}{2}g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2(Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w^2(A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - \\
&A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w[A_\mu Z^0_\nu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - g\alpha[H^3 + \\
&H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + \\
&2(\phi^0)^2H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu H - \tfrac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \\
&\phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \tfrac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \\
&\phi^0\partial_\mu H) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_w MA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \\
&\phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_w A_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{4}g^2 W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-] - \\
&\tfrac{1}{4}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2-1)^2\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \\
&\tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2 s_w A_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H(W^+_\mu\phi^- - \\
&W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2 - 1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^1 s_w^2 A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m_e^\lambda)e^\lambda - \\
&\bar{\nu}^\lambda\gamma\partial\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m_u^\lambda)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m_d^\lambda)d^\lambda_j + igs_w A_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \\
&\tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - \\
&1 - \gamma^5)u^\lambda_j) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5)d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 + \\
&\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_j C^\dagger_{\lambda\kappa}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[-\phi^+(\bar{\nu}^\lambda(1 - \\
&\gamma^5)e^\lambda) + \phi^-(\bar{e}^\lambda(1+\gamma^5)\nu^\lambda)] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5 e^\lambda)] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m_d^\kappa(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1 - \\
&\gamma^5)d^\kappa_j) + m_u^\lambda(\bar{u}^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m_d^\lambda(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m_u^\kappa(\bar{d}^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1 - \\
&\gamma^5)u^\kappa_j] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}H(\bar{u}^\lambda_j u^\lambda_j) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}H(\bar{d}^\lambda_j d^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5 u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j) + \\
&\bar{X}^+(\partial^2 - M^2)X^+ + \bar{X}^-(\partial^2 - M^2)X^- + \bar{X}^0(\partial^2 - \tfrac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar{Y}\partial^2 Y + igc_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{X}^0 X^- - \\
&\partial_\mu\bar{X}^+ X^0) + igs_w W^+_\mu(\partial_\mu\bar{Y}X^- - \partial_\mu\bar{X}^+ Y) + igc_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- X^0 - \partial_\mu\bar{X}^0 X^+) + \\
&igs_w W^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^- Y - \partial_\mu\bar{Y}X^+) + igc_w Z^0_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu\bar{X}^- X^-) + igs_w A_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+ X^+ - \\
&\partial_\mu\bar{X}^- X^-) - \tfrac{1}{2}gM[\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \tfrac{1}{c_w^2}\bar{X}^0 X^0 H] + \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}igM[\bar{X}^+ X^0\phi^+ - \\
&\bar{X}^- X^0\phi^-] + \tfrac{1}{2c_w}igM[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + igMs_w[\bar{X}^0 X^-\phi^+ - \bar{X}^0 X^+\phi^-] + \\
&\tfrac{1}{2}igM[\bar{X}^+ X^+\phi^0 - \bar{X}^- X^-\phi^0]
\end{aligned}
$$

Figure 2:

Gleichung herleiten. Diese Gleichung beschreibt die Komponenten von freien Quantenfelder. Dazu gehen Sie von der Lorentz-invarianten Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{63}$$

aus. Das Potential ist hier durch

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{64}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\right) = 0, \tag{65}$$

lösen und

$$\partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{66}$$

verwenden.

Lösung

In diesem Fall gilt

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{67}$$

Des weiteren gilt auch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} = \partial^\mu \phi. \tag{68}$$

Daher gilt für den zweiten Term der Euler-Lagrangegleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial^2 \phi. \tag{69}$$

Setzt man dies in die Gleichung ein gilt

$$\partial^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{70}$$

Setzt man den Hinweis und das Potential ein erhaltet man

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0. \tag{71}$$

Dies ist die Klein-Gordon Gleichung.