Theoretische Physik I: Übung #4

16.Sep.2019

Matthias Hanke; Stephan Meighen-Berger

Matthias Hanke **Stephan Meighen-Berger**

Beispiel 1

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich auf der Innenseite eines Zylinders und erfährt eine Federkraft $\vec{F} = -k\vec{r}$. Berechnen Sie die Bewegung des Teilchens.

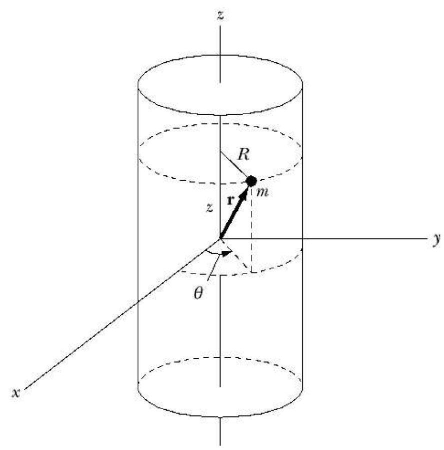

Fig. 7–9.

Figure 1:

Beispiel 2

Verwenden Sie die Kettenregel und bestimmen Sie die totale Zeitableitung einer Funktion $F(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$. Stellen Sie die kanonischen Größen mittels den Hamiltongleichungen dar. Das Resultat sollte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \{H, F\}, \tag{1}$$

sein.

Beispiel 3

Gegeben sei eine Lagrangefunktion in sphärischen Koordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r). \tag{2}$$

Bestimmen Sie die resultierende Hamiltonfunktion. Verwenden Sie dann diese und stellen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung auf.
Diese sollen Sie nun für den Radialanteil lösen. Dazu machen Sie den Ansatz

$$S(t, r, \theta, \phi) = S_1(t) + S_2(r) + S_3(\theta) + S_4(\phi). \tag{3}$$

Setzen Sie dann $\frac{\mathrm{d}S_4}{\mathrm{d}\phi} = L_z$ und $\frac{\mathrm{d}S_3}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}$.
Stellen Sie nun die Gleichung für den Radialanteil auf. Bestimmen Sie nun im Spezialfall

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \tag{4}$$

die Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}r}. \tag{5}$$

Bestimmen Sie damit nun $\phi = -\frac{\partial S_2}{\partial L}$ (inverse Legendre Transformation). Das resultierende Integral ergibt

$$\phi = \arccos \frac{L^2 - GMm^2 r}{r\sqrt{2mEL^2 + G^2M^2m^4}} + \phi_0. \tag{6}$$

Stellen Sie diese Gleichung für L^2 um und bestimmen Sie e und d aus der Gleichung

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}. \tag{7}$$

Bestimmen Sie nun für welche Energien eine Ellipse (e $<$ 0), Parabel (e $=$ 1) und Hyperbel (e $>$ 1) beschrieben werden.

Beispiel 4

Ein Seil der Länge l wird zwischen zwei Bäume aufgehängt, die eine Distanz $d < l$ voneinander stehen. Bestimmen Sie die Höhe des Seils y abhängig von x. Dazu bestimmen Sie zuerst die potentielle Energie des Seils abhängig von $y(x)$. Dann berechnen Sie die Lagrangedichte und verwenden Sie diese um die "Bewegungsgleichungen" zu bestimmen. Lösen Sie dann diese für $y(x)$. Um die Gleichung zu lösen multiplizieren Sie die Gleichung mit y' und ermitteln Sie ob das Resultat die Ableitung einer Funktion ist. Nach der Integration verwenden Sie

$$\frac{\chi}{\sqrt{1 + \chi'^2}} = A \rightarrow \chi = C\cosh\left(\frac{x + B}{A}\right). \tag{8}$$

Beispiel 5

Ein schwingendes Seil kann wie unendlich viele zusammenhängende Pendel betrachtet werden. Stellen Sie die Bewegeungsgleichungen für solch ein Seil auf. Dazu bestimmen Sie zuerst die Lagrangedichte gegeben durch

$$L = \int (\mathrm{d}T - \mathrm{d}U) = \int \mathcal{L}\mathrm{d}V. \tag{9}$$

Die infinitesimalen Energien eines Seilsegments der Länge ds muss daher bestimmt werden. Dazu verwenden Sie

$$\mathrm{d}s \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Vernachlässigen Sie alle infinitesimalen Terme über der Ordnung 2. und verwenden Sie eine konstante Dichte μ.

Beispiel 6

Die Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen in einem Feld lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q(\vec{A}\dot{\vec{r}} - \phi). \tag{11}$$

Berechnen Sie die resultierende Bewegungsgleichung und benennen Sie die Kraft. Beachten Sie dabei, dass $\vec{A}$ ein Vektorpotential ist, für das gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{A}. \tag{12}$$

Des weiteren gilt

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A})_i, \tag{13}$$

und

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{14}$$

Beachten Sie

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\right)\dot{r}_j = \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_i} A_j - \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_j} A_i = (\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_l} A_m = \epsilon_{ijk}\dot{r}_j \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial r_l} A_m = (\dot{\vec{r}} \times (\nabla \times A))_i. \tag{15}$$

Beispiel 7

Nun Lösen Sie das vorige Beispiel, diesmal aber mit vierer Vektoren. Dazu starten Sie mit der Lagrangefunktion

$$L(\tau) = \frac{1}{2} m u^\mu(\tau) u_\mu(\tau) + q u^\mu(\tau) A_\mu(x), \tag{16}$$

wobei $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu / \mathrm{d}\tau$ die Vierergeschwindigkeit ist. Die Euler-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\nu} = 0, \tag{17}$$

und der anti-symmetrische Elektromagnetischetensor lautet

$$F_{\nu\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{18}$$

Beispiel 8

Teilchenphysiker arbeiten mit dem sogenannten Standard Modell der Teilchenphysik. Dieses Modell beschreibt alle bekannten Kräfte, bis auf die Gravitation. Die Lagrangefunktion des Standard Modells ist in Abbildung 2 dargestellt. Hier werden Sie den ersten Schritt Richtung Teilchenphysik tätigen und die Klein-Gordon Gleichung herleiten. Diese Gleichung beschreibt die Komponenten von freien Quantenfelder. Dazu gehen Sie von der Lorentz-invarianten Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{19}$$

aus. Das Potential ist hier durch

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \tag{20}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\right) = 0, \tag{21}$$

lösen und

$$\partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{22}$$

verwenden.

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu\partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \tfrac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade}g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu + \tfrac{1}{2}ig_s^2(\bar{q}^\sigma_i\gamma^\mu q^\sigma_j)g^a_\mu + \\
&\bar{G}^a\partial^2G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu\bar{G}^a G^b g^c_\mu - \partial_\nu W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - M^2W^+_\mu W^-_\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\nu Z^0_\mu\partial_\nu Z^0_\mu - \tfrac{1}{2c_w^2}M^2Z^0_\mu Z^0_\mu - \\
&\tfrac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial_\mu A_\nu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu H\partial_\mu H - \tfrac{1}{2}m_h^2H^2 - \partial_\mu\phi^+\partial_\mu\phi^- - M^2\phi^+\phi^- - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi^0\partial_\mu\phi^0 - \\
&\tfrac{1}{2c_w^2}M\phi^0\phi^0 - \beta_h[\tfrac{2M^2}{g^2} + \tfrac{2M}{g}H + \tfrac{1}{2}(H^2+\phi^0\phi^0+2\phi^+\phi^-)] + \tfrac{2M^4}{g^2}\alpha_h - igc_w[\partial_\nu Z^0_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - igs_w[\partial_\nu A_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu(W^+_\mu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu\partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu(W^+_\nu\partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu\partial_\nu W^+_\mu)] - \tfrac{1}{2}g^2W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \\
&\tfrac{1}{2}g^2W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2c_w^2(Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2s_w^2(A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - \\
&A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2s_wc_w[A_\mu Z^0_\nu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu] - g\alpha[H^3 + \\
&H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{8}g^2\alpha_h[H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + \\
&2(\phi^0)^2H^2] - gMW^+_\mu W^-_\mu H - \tfrac{1}{2}g\tfrac{M}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu H - \tfrac{1}{2}ig[W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \\
&\phi^+\partial_\mu\phi^0)] + \tfrac{1}{2}g[W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) - W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)] + \tfrac{1}{2}g\tfrac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \\
&\phi^0\partial_\mu H) - ig\tfrac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_wMA_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - ig\tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \\
&\phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_wA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \tfrac{1}{4}g^2W^+_\mu W^-_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-] - \\
&\tfrac{1}{4}g^2\tfrac{1}{c_w^2}Z^0_\mu Z^0_\mu[H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2-1)^2\phi^+\phi^-] - \tfrac{1}{2}g^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \\
&\tfrac{1}{2}ig^2\tfrac{s_w^2}{c_w}Z^0_\mu H(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}g^2s_wA_\mu\phi^0(W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) + \tfrac{1}{2}ig^2s_wA_\mu H(W^+_\mu\phi^- - \\
&W^-_\mu\phi^+) - g^2\tfrac{s_w}{c_w}(2c_w^2-1)Z^0_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - g^1s_w^2A_\mu A_\mu\phi^+\phi^- - \bar{e}^\lambda(\gamma\partial + m_e^\lambda)e^\lambda - \\
&\bar{\nu}^\lambda\gamma\partial\nu^\lambda - \bar{u}^\lambda_j(\gamma\partial + m_u^\lambda)u^\lambda_j - \bar{d}^\lambda_j(\gamma\partial + m_d^\lambda)d^\lambda_j + igs_wA_\mu[-(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \tfrac{2}{3}(\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \\
&\tfrac{1}{3}(\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{4c_w}Z^0_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2 - 1 - \gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(\tfrac{4}{3}s_w^2 - \\
&1 - \gamma^5)u^\lambda_j) + (\bar{d}^\lambda_j\gamma^\mu(1 - \tfrac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5)d^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^+_\mu[(\bar{\nu}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)e^\lambda) + (\bar{u}^\lambda_j\gamma^\mu(1 + \\
&\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}W^-_\mu[(\bar{e}^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar{d}^\kappa_jC^\dagger_{\lambda\kappa}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)] + \tfrac{ig}{2\sqrt{2}}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[-\phi^+(\bar{\nu}^\lambda(1 - \\
&\gamma^5)e^\lambda) + \phi^-(\bar{e}^\lambda(1+\gamma^5)\nu^\lambda)] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_e^\lambda}{M}[H(\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0(\bar{e}^\lambda\gamma^5e^\lambda)] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^+[-m_d^\kappa(\bar{u}^\lambda_jC_{\lambda\kappa}(1 - \\
&\gamma^5)d^\kappa_j) + m_u^\lambda(\bar{u}^\lambda_jC_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j] + \tfrac{ig}{2M\sqrt{2}}\phi^-[m_d^\lambda(\bar{d}^\lambda_jC^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m_u^\kappa(\bar{d}^\lambda_jC^\dagger_{\lambda\kappa}(1 - \\
&\gamma^5)u^\kappa_j] - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}H(\bar{u}^\lambda_ju^\lambda_j) - \tfrac{g}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}H(\bar{d}^\lambda_jd^\lambda_j) + \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_u^\lambda}{M}\phi^0(\bar{u}^\lambda_j\gamma^5u^\lambda_j) - \tfrac{ig}{2}\tfrac{m_d^\lambda}{M}\phi^0(\bar{d}^\lambda_j\gamma^5d^\lambda_j) + \\
&\bar{X}^+(\partial^2 - M^2)X^+ + \bar{X}^-(\partial^2 - M^2)X^- + \bar{X}^0(\partial^2 - \tfrac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar{Y}\partial^2Y + igc_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar{X}^0X^- - \\
&\partial_\mu\bar{X}^+X^0) + igs_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar{Y}X^- - \partial_\mu\bar{X}^+Y) + igc_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^-X^0 - \partial_\mu\bar{X}^0X^+) + \\
&igs_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar{X}^-Y - \partial_\mu\bar{Y}X^+) + igc_wZ^0_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+X^+ - \partial_\mu\bar{X}^-X^-) + igs_wA_\mu(\partial_\mu\bar{X}^+X^+ - \\
&\partial_\mu\bar{X}^-X^-) - \tfrac{1}{2}gM[\bar{X}^+X^+H + \bar{X}^-X^-H + \tfrac{1}{c_w^2}\bar{X}^0X^0H] + \tfrac{1-2c_w^2}{2c_w}igM[\bar{X}^+X^0\phi^+ - \\
&\bar{X}^-X^0\phi^-] + \tfrac{1}{2c_w}igM[\bar{X}^0X^-\phi^+ - \bar{X}^0X^+\phi^-] + igMs_w[\bar{X}^0X^-\phi^+ - \bar{X}^0X^+\phi^-] + \\
&\tfrac{1}{2}igM[\bar{X}^+X^+\phi^0 - \bar{X}^-X^-\phi^0]
\end{aligned}
$$

Figure 2: