Theoretische Physik I: Übung #3

16.Sep.2019

Matthias Hanke; Stephan Meighen-Berger

Matthias Hanke **Stephan Meighen-Berger**

Beispiel 1

Bestimmen Sie Lagrangefunktion eines freien Teilchens. Nehmen Sie nun an das System rotiert wie in Abbildung 1 gezeigt. Bestimmen Sie die Transformation um von $\vec{r}$ in das mit rotierende System $\vec{r'}$ zu kommen. Wenden Sie diese Transformation auf die Lagrangefunktion an und berechnen Sie die Euler-Lagrangegleichungen. Die resultierende Terme korrespondieren zu welchen Kräften? Welche Art von Kräfte sind diese?

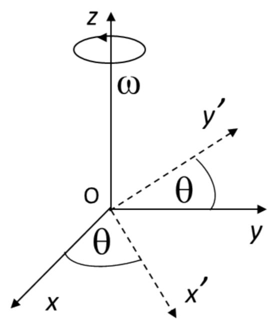

Figure 1:

Lösung
Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2. \tag{1}$$

Die Transformation lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Damit lautet die Lagrangefunktion im mit rotierendem System

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r'}} + \omega \times \vec{r'})^2. \tag{3}$$

Die resultierenden Lagrangegleichungen sind damit

$$m \left(\ddot{\vec{r'}} + \omega \times (\omega \times \vec{r'}) + 2\omega \times \dot{\vec{r'}} \right) = 0. \tag{4}$$

Der erste Term entspricht der Radialkraft, der zweite der Zentrifugalkraft und der letzte der Corioliskraft.

Beispiel 2

Leiten Sie die erhaltene Nötherladung aufgrund von Translationsinvarianz.
Lösung
Translation ist definiert als

$$x^i \to x^i + \epsilon^i, \tag{5}$$

wo ϵ^i klein sind. Damit ist die infinitesimale Translation eines Teilchenpfades gegeben durch

$$\delta_s x^i(t) = \epsilon^i. \tag{6}$$

Somit ändert sich $\mathcal{L}$ unter Variation

$$\delta_s \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \delta_s x^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \epsilon^i = 0. \tag{7}$$

Verwendet man nun die Euler-Lagrange Gleichungen erhält man

$$\delta_s \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) \delta_s x^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \delta_s x^i \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right] \epsilon^i. \tag{8}$$

Da gilt

$$Q(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \Delta(q, \dot{q}, t), \tag{9}$$

ist nun die erhaltene Nötherladung

$$p^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}. \tag{10}$$

Beispiel 3

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \tag{11}$$

Leiten sie die Hamiltonfunktion her und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her.
Lösung
Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = p\dot{x} - \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = T + V. \tag{12}$$

Damit gilt für die Hamiltongleichungen

$$\dot{x} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \to \dot{x} = \frac{p}{m} \tag{13}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} \to \dot{p} = -kx. \tag{14}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}(m\dot{x})}{\mathrm{d}t} = -kx \to m\ddot{x} = -kx. \tag{15}$$

Beispiel 4

Gegeben seien vier Federn und drei Blöcke wie in Abbildung 2. Dabei bewegen sich die Wände am Rand nicht. Bestimmen sie die Lagrangefunktion des Systems und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für

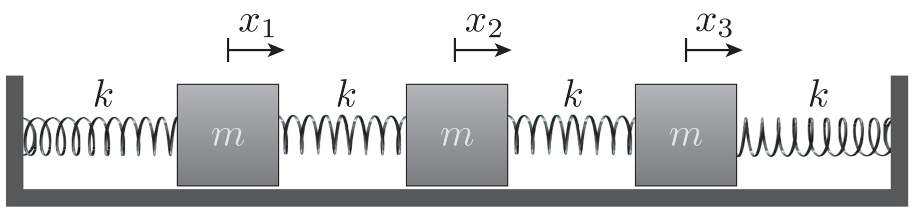

Figure 2:

x_1, x_2 und x_3.
Machen Sie dann den Ansatz $x_i = A_i e^{i\omega}$ und stellen Sie die Matrixgleichung für die Koeffizienten A_i auf. Diese Gleichung hat nur nicht triviale Lösungen, wenn die Determinante gleich null ist. Setzten Sie die Determinante daher gleich null und bestimmen Sie die möglichen Eigenfrequenzen.
Lösung
Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2\right). \tag{16}$$

Die resultierenden Gleichungen sind

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{17}$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) \tag{18}$$

$$m\ddot{x}_3 = -kx_3 - k(x_3 - x_2). \tag{19}$$

Nach einsetzen des gegeben Ansatzes erhaltet man die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{20}$$

Die Determinante der Matrix setzt man nun gleich null

$$(-m\omega^2 + 2k)\left[(-m\omega^2 + 2k)^2 - 2k^2\right] = 0. \tag{21}$$

Daher sind die möglichen Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}};\ \omega_2 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}};\ \omega_3 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}. \tag{22}$$

Beispiel 5

Gegeben sei ein Rollpendel wie in Abbildung 3. Dabei wird die Masse m_1 von der Masse m_2 reibungsfrei mit bewegt. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mittels Zwangsbedingungen und der Lagrangefunktion 2.Art.

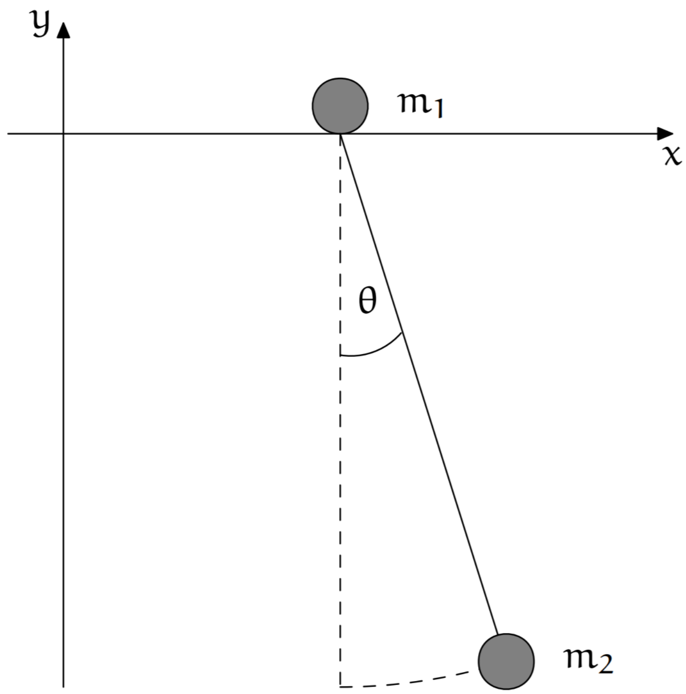

Figure 3:

Lösung
Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingungen $\mathcal{Z}$ lauten

$$m\ddot{x} = F + \mathcal{Z}. \tag{23}$$

In diesem Beispiel resultiert das in vier Gleichungen

$$m_1 + \ddot{x}_1 = Z_{1x};\ m_2\ddot{x}_2 = Z_{2x}, \tag{24}$$

$$m_1 + \ddot{y}_1 = Z_{1y} - m_1 g;\ m_2\ddot{y}_2 = Z_{2y} - m_1 g, \tag{25}$$

Die geometrischen Einschränkungen des Problems lauten

$$y_1 = 0 \tag{26}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2. \tag{27}$$

Damit sind nur zwei Koordinaten unabhängig (x_1, ϕ). Die zugehörigen Transformationsgleichungen lauten

$$x_2 = x_1 + l\sin\phi;\ y_2 = -l\cos\phi. \tag{28}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 = Z_{1x};\ m_1 g = Z_{1y} \tag{29}$$

$$m_2(\ddot{x}_1 + l\ddot{\phi}\cos\phi - l\dot{\phi}^2\sin\phi) = Z_{2x} \tag{30}$$

$$m_2(l\ddot{\phi}\sin\phi + l\dot{\phi}^2\cos\phi + g) = Z_{2x}. \tag{31}$$

Nun zur Lagrangefunktion 2. Art. Die kinetischen Energien lauten

$$T_1 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2;\ T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \tag{32}$$

Nur die aufgehängte Masse besitzt eine potentielle Energie

$$U = m_2 g y_2. \tag{33}$$

damit lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g y_2. \tag{34}$$

Nun setzt man die Zwangsbedingungen ein

$$x_2 = x_1 + l\sin\theta;\ y_2 = -l\cos\theta. \tag{35}$$

Nach einsetzen der Bedingungen lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_1^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1 l\dot{\theta}\cos\theta\right) + m_2 g l\cos\theta. \tag{36}$$

Damit lauten die Euler-Lagrangegleichungen

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) + m_2 l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0 \tag{37}$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1\cos\theta + g\sin\theta = 0. \tag{38}$$