Theoretische Physik I: Übung #2

16.Sep.2019

Matthias Hanke; Stephan Meighen-Berger

Matthias Hanke **Stephan Meighen-Berger**

Beispiel 1

Um die Rotation der Erde zu bestimmen, kann man ein Foucaultsches Pendel verwenden. Dies besteht aus einem langen sphärischem Pendel mit großer Pendelmasse. Nehmen Sie an, dass der Oszillationswinkel sehr klein ist und nur die Horizontalbewegung beachtet werden muss. Des Weiteren, nehmen Sie an, dass $\omega\dot{x} << g$ gilt. Unter diesen Annahmen, stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und berechnen Sie die Oszillationsfrequenz.

Lösung

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\vec{T} - mg\vec{e}_z - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} = m\vec{a}, \tag{1}$$

wobei $\vec{T}$ die Seilspannung ist und die Zentrifugalkraft nur eine geringe Änderung auf $\vec{g}$ bewirkt da

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \cos\alpha. \tag{2}$$

Die externen Kräfte setzt man mit einer wiederherstellenden Kraft $mg\sin\theta$ mit

$$mg\sin\theta \approx mg\theta = \frac{mg}{L}L\theta. \tag{3}$$

Mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, setzt man die Kräfte gleich

$$\vec{T} - mg\vec{e}_z \approx -\frac{mg}{L}\rho(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y). \tag{4}$$

Die Winkelgeschwindigkeits- und Geschwindigkeitsvektoren lauten (mit α gleich dem Breitengrad)

$$\vec{\omega} = \omega(\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_z) \tag{5}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y. \tag{6}$$

Dies setzt man wiederum in die Bewegungsgleichung ein und erhält

$$-\frac{mg}{L}\rho(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) - 2m\omega(\cos\alpha\vec{e}_y + \sin\alpha\vec{e}_z) \times (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) = m\vec{a}. \tag{7}$$

Mittels auflösen und Kombinieren der Komponenten bekommt man drei Gleichungen

$$-\frac{g}{L}x\vec{e}_x + 2\omega\dot{y}\sin\alpha\vec{e}_x = \ddot{x}\vec{e}_x, \tag{8}$$

$$-\frac{g}{L}y\vec{e}_y - 2\omega\dot{x}\sin\alpha\vec{e}_y = \ddot{y}\vec{e}_y, \tag{9}$$

$$2\omega\dot{x}\cos\alpha\vec{e}_z = \ddot{z}\vec{e}_z. \tag{10}$$

. Die Letzte Gleichung ist mit den ursprünglichen Annahmen vernachlässigbar. Dies führt zu

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 2\omega\sin\alpha\dot{y} \tag{11}$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y = -2\omega\sin\alpha\dot{x}. \tag{12}$$

Hier verwenden wir komplexe Variablen. Das Coriolis Theorem kann man auch verwenden. Die Lösung im rotierenden System empfehlen wir nicht, da sie mit viel Rechenaufwand verbunden ist.

Definiert man

$$z = x + iy, \tag{13}$$

und addiert man Gleichung 12 i mal zu Gleichung 11 erhaltet man

$$\ddot{z} + 2i\omega_\alpha\dot{z} + \frac{g}{L}z = 0, \tag{14}$$

mit $\omega_\alpha = \omega \sin\alpha$. Definiert man nun $z = \omega_z e^{-i\omega_\alpha t}$ wandelt sich die Bewegungsgleichung in die eines Oszillators um

$$\ddot{\omega}_z + \left(\frac{g}{L} + \omega_\alpha^2\right)\omega_z = 0 \tag{15}$$

mit Lösung

$$\omega_z = A\sin wt + B\cos wt, \tag{16}$$

und $w = \sqrt{\frac{g}{L} + \omega_\alpha^2}$. Dies bedeutet, in einem rotierendem Bezugssystem mit Kreisfrequenz ω_α macht das Pendel eine einfache harmonische Oszillationsbewegung mit Frequenz w.

Beispiel 2

Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen her.
Lösung
Nachdem man allgemeine Koordinaten $q(t)$ und die minimale Variationen $\eta(t)$ eingeführt hat kann man die Wirkung als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t) + \epsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t), t)\mathrm{d}t, \tag{17}$$

schreiben. S soll nun maximiert bzw. minimiert werden in Bezug auf ϵ. Daher leitet man nach ϵ ab und setzt das Resultat gleich null

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t) + \epsilon\eta(t), \dot{q}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t), t)\mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

Um die obige Gleichung zu Lösen, müssen die partiellen Ableitungen bestimmt werden

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{19}$$

Den zweiten Term integriert man partiell

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\eta\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Oben wurde beachtet, dass die η Terme am Rand verschwinden. Nachdem man die partielle Integration wieder einsetzt und η faktorisiert erhaltet man

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\eta(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{21}$$

Da das Integral für all Pfade η verschwinden soll, muss der Integrand gleich null sein, was die Euler-Lagrange Gleichungen ergibt

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = 0. \tag{22}$$

Beispiel 3

Sei ein Pendel mit einer Feder befestigt wie in Abbildung . Im Gleichgewichtszustand hat die Feder eine länge l. Unter der Annahme, dass die Schwingung der Feder zwei dimensional beschrieben werden kann, bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für x und θ.

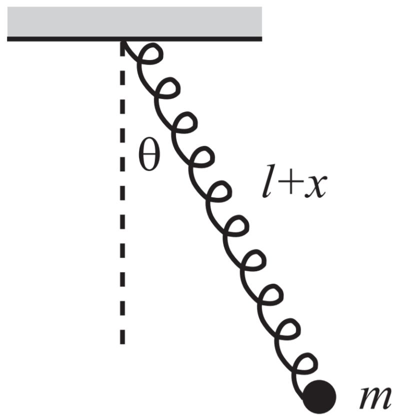

Figure 1:

Lösung
Die kinetische Energie hat eine radiale und eine tangentiale Komponente

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right). \tag{23}$$

Die potentielle Energie entsteht durch Gravitation und Federkraft

$$V = -mg(l+x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2. \tag{24}$$

Die Lagrangefunktion lautet dann

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l+x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2. \tag{25}$$

Dies resultiert in zwei Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \to m\ddot{x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx, \tag{26}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \to m(l+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta. \tag{27}$$

Beispiel 4

Gegeben ist

$$\mathcal{L} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k^2(x+y)^2. \tag{28}$$

Lösen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen.
Lösung
Durch einsetzen in die Definition der Euler-Lagrange Gleichungen erhaltet man

$$-2k^2(x+y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x}) = 0, \tag{29}$$

und

$$-2k^2(x+y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{y}) = 0. \tag{30}$$

Diese Gleichung kann man in Matrixnotation umschreiben

$$\ddot{\vec{r}} + k^2 \hat{U} \vec{r} = 0, \tag{31}$$

mit $\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Für solche Gleichungen macht man meistens den Ansatz

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} Ae^{mt} \\ Be^{mt} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Durch einsetzen bekommt man

$$\vec{r}\left(\mathbb{1}m^2\right) + k^2 \hat{U} \vec{r} = 0. \tag{33}$$

Den Exponentialterm kann man weg dividieren und die Determinante der Koeffizienten lautet dann

$$(m^2 + k^2)^2 - k^4 = 0. \tag{34}$$

Die Determinante wird oben gleich null gesetzt, da nur in diesem Fall es dann nicht-triviale Lösungen gibt. Die obrige Gleichung hat vier Lösungen für m. Diese lauten $m_{1,2} = 0$ und $m_{3,4} = \pm i\sqrt{2}k$. Um eine allgemeine Lösung zu bekommen kombiniert man die verschiedenen Speziallösungen. Zum Beispiel in der Form

$$x = A_1 + A_2 t + A_3 \cos\sqrt{2}kt + A_4 \sin\sqrt{2}kt. \tag{35}$$

Unter Beachtung, dass B und A nicht unabhängig sind, sondern die Gleichungen für den Eigenvektor befolgen gilt

$$y = -A_1 - A_2 t + A_3 \cos\sqrt{2}kt + A_4 \sin\sqrt{2}kt. \tag{36}$$

Beispiel 5

Bestimmen und lösen Sie ein einfaches Pendel mit Masse m, Länge l und Öffnungswinkel zur Vertikalen θ im Lagrange Formalismums. Machen Sie dazu auch eine Kleinwinkelnäherung.

Lösung

Die kinetische und potentielle Energie sind

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \tag{37}$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta). \tag{38}$$

Daher gilt

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos\theta). \tag{39}$$

Die resultierende Bewegungsgleichung lautet somit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g\sin\theta}{l}. \tag{40}$$

In der Kleinwinkelnäherung lautet diese Gleichung

$$\ddot{\theta} = -\frac{g\theta}{l}. \tag{41}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\theta(t) = A\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + B\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t). \tag{42}$$