Theoretische Physik I: Übung #1

16.Sep.2019

Matthias Hanke; Stephan Meighen-Berger

Matthias Hanke **Stephan Meighen-Berger**

Beispiel 1

Berechnen Sie die Bahnkurve für einen aus 5 m geworfenem Ball. Der Ball wird unter einem Winkel von 60° und einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s geworfen. Bestimmen sie die Flugweite und die Bahnlnge unter Vernachlässigung der Reibung. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der Abbildungen 1 und 2.

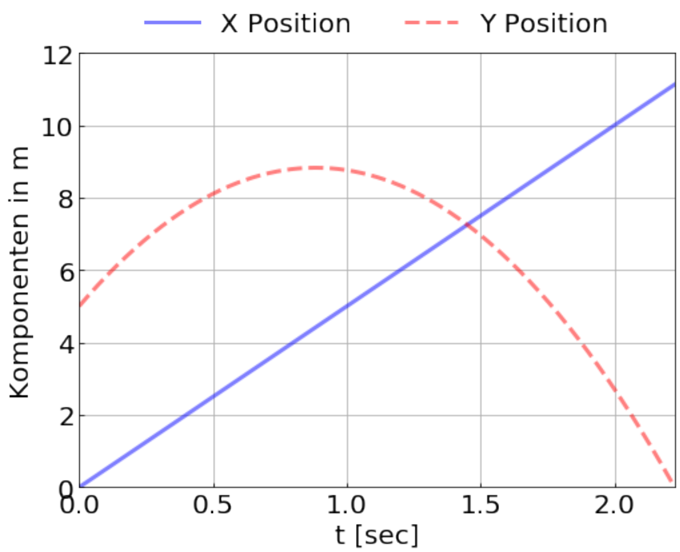

Figure 1: Parabel

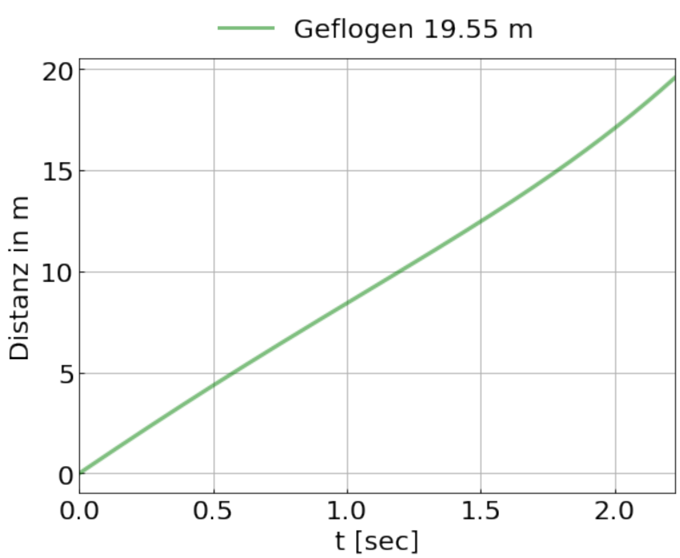

Figure 2: Distanz

Beispiel 2

Leiten Sie die kinematischen Vektoren in Zylinderkoordinaten her und schreiben Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Lösung

In kartesischen Koordinaten gilt

- $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$
- $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$
- $\vec{e}_z = \vec{e}_z$

Mittels Ableitung und Zusammenfassung erhält man

- $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$
- $\dot{\vec{e}}_z = 0$

Eine Position $\vec{r}$ in Zylinderkoordinaten ist nun

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z, \tag{1}$$

mit korrespondierendem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z. \tag{2}$$

Durch nochmaliges Ableiten erhält man die Beschleunigung

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z. \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichung bekommt man aus der Kraft $\vec{F}$. Die Komponenten stellen die Gleichungen mit

$$F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{4}$$

$$F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{5}$$

$$F_z = ma_z = m\ddot{z}. \tag{6}$$

Beispiel 3

Evaluieren Sie das Integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \cos\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Bestimmen Sie dafür die Jacobideterminante $\det \hat{J}$ der Transformation zwischen Kartesischen- und Polarkoordinaten und führen Sie das Integral in Polarkoordinaten aus.

Lösung

Die Transformation von polar zu kartesischen Koordinaten ist gegeben durch $\vec{F} : \mathbb{R}^+ \times [0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit Komponenten

$$x = r\cos\theta, ;\ y = r\sin\theta \tag{8}$$

Daraus ergibt sich für die Jacobimatrix

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{9}$$

mit Determinante $\det \hat{J} = r$.

Daraus folgt für die Integration in Polarkoordinaten

$$\int\int_{F(A)} f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{A} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{10}$$

Die Grenzen der Integration in Polarkoordinaten sind

$$\pi \leq \theta \leq 2\pi \tag{11}$$

$$0 \leq r \leq 1 \tag{12}$$

Nun kann man das Integral evaluieren

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \cos\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x. = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{1} r\cos(r^2) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(1)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\sin(1). \tag{13}$$

Beispiel 4

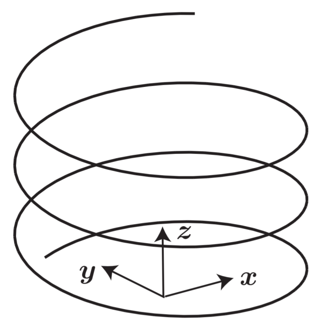

Figure 3: Helix

Ein 3000 kg schweres Flugzeug startet seinen Landeflug auf einer Helixbahn aus 10000m. Das Flugzeug sinkt mit 3 m/s und einer Geschwindigkeit von 70 m/s. Die Winkelgeschwindigkeit des Flugzeugs ist 0.05 rad / s. Berechnen Sie die Kraft, die auf das Flugzeug wirkt und die Krümmung des Pfades.

Lösung

Der Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten lautet

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z. = v\vec{e}_t \tag{14}$$

Da der Radius konstant ist, gilt $\dot{r} = 0$. Damit gilt

$$70 = \sqrt{(0.05R)^2 + 3^2} \rightarrow R \approx 1400 \text{ m}. \tag{15}$$

Die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n, \tag{16}$$

und wenn man die null Terme vernachlässigt

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n. \tag{17}$$

Damit gilt

$$\vec{e}_n = -\vec{e}_r \tag{18}$$

und

$$a = 0.05^2 \cdot 1400 = 3,5\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{70^2}{3.5} \approx 1400 \text{ m}. \tag{19}$$

Nebenbemerkung: Da $\rho \approx r$ ist der Helix sehr eng.
Unter Beachtung, dass der Senkungswinkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\dot{z}}{v}\right) = 2.46$ ist, gilt für die Normalkraft F_n

$$F_n = ma_n = 3000 \cdot \sin(\alpha) \cdot 3.5 \approx 1300 \text{ N}. \tag{20}$$

Somit gilt für die Hubkraft $\vec{L}$

$$\vec{L} = (-1300\vec{e}_r + 3000\vec{e}_z) \text{ N}. \tag{21}$$

Beispiel 5

Sei ein Teilchen gefangen in einem Potentialtopf, sehr nahe an dem Minimum. Die maximale Distanz x_M hat das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$. Das Minimum ist definiert über $V(0) = \min(V(x)) = 0$. Daraus folgt $V'(0) = 0$ und $V''(0) = k \geq 0$. Bestimmen Sie die Varianz des Ortes. Dazu bestimmen Sie die Periode und die daraus resultierende Wahrscheinlichkeitsdichte, $P(x)$, das Teilchen in einem Intervall $x + \mathrm{d}x$ zu finden.
Hinweise

- Es wird eine Maclaurin Reihe benötigt.
- Die Varianz von $P(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\left(x_M^2 - x^2\right)^{1/2}}\right)$ ist $\sigma_x = \frac{x_M}{\sqrt{2\pi}}$.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\arccos(x/A)} = \frac{1}{A\sqrt{A^2 - x^2}}$

Lösung
Die Energie des Teilchens ist gegeben durch

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x). \tag{22}$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}. \tag{23}$$

Da sich das Teilchen sehr nahe am Minimum befindet, kann man das Potential um den Nullpunkt entwickeln

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}V''(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3). \tag{24}$$

Durch einsetzen der Angabe erhählt man

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{25}$$

Dies bedeutet, dass das Potential eine Kraft der Form

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \tag{26}$$

auf das Teilchen wirken lässt. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$x(t) = A\cos(2\pi\omega(t - t_0)), \tag{27}$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$ und A und t_0 sind Integrationskonstanten. Setzt man die Randbedingungen ein erhält man

$$x(t) = x_M\cos(2\pi\omega t);\ v(t) = -(2\pi\omega)x_M\sin(2\pi\omega t). \tag{28}$$

Das Teilchen hat eine Periode $T = 2\pi\omega^{-1}$. Durch umstellen erhält man

$$t(x) = \frac{\arccos(x/x_M)}{2\pi\omega} \rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\pi\omega x_M}\frac{1}{\sqrt{x_M^2 - x^2}} = 1/v. \tag{29}$$

Hieraus folgt für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

$$P(x) = \frac{4\pi x_M}{vT} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_M^2 - x^2}}. \tag{30}$$

Aus dem Hinweis bekommt man dann die Varianz

$$\sigma_x = \frac{x_M}{\sqrt{2\pi}} \tag{31}$$